Geometria nie-kählerowska i elastyczność struktur pseudowklęsłych w świetle teorii Naohiko Kasuyi

AUTOR

Fundacja Dobre Państwo

STRESZCZENIE / ABSTRACT

Tekst zgłębia napięcie między lokalną gładkością a globalnym rygorem w geometrii zespolonej. Autor analizuje rozmaitości Kählera jako model harmonii, gdzie struktura zespolona, niemannowska i symplektyczna współistnieje w pełnej zgodności. Kluczowym punktem jest jednak przejście ku obszarom mniej regularnym – powierzchniom nie-kählerowskim i silnie pseudowklęsłym, które stanowią centrum zainteresowań teorii Naohiko Kasuyi. Artykuł podkreśla, że o ile w przypadku powierzchni zwartych mahlerowskość można powiązać z parzystością pierwszej liczby Bettiego, o tyle w przestrzeniach otwartych sytuacja staje się znacznie bardziej złożona. Całość ukazuje przesunięcie uwagi badawczej z klasycznych modeli ku peryferiom geometrii zespolonej, łącząc je z geometrią kontaktową i symplektyczną.

The text delves into the tension between local smoothness and global rigor in complex geometry. The author analyzes Kähler manifolds as a model of harmony, where complex, Riemannian, and symplectic structures coexist in full agreement. However, the key point is the transition toward less regular areas—non-Kähler and strongly pseudoconcave surfaces, which are at the center of Naohiko Kasuya's theory. The article emphasizes that while in the case of compact surfaces Kählerianity can be linked to the parity of the first Betti number, the situation becomes significantly more complex in open spaces. Overall, it shows a shift in research focus from classical models toward the peripheries of complex geometry, linking them with contact and symplectic geometry.

Artykuł stanowi analityczną podróż poza bezpieczne granice kählerowskiej harmonii i Steinowskiego rygoru, badając obszary geometrii zespolonej, które przez lata

traktowano jako peryferyjne lub deficytowe. Główna teza tekstu zakłada, że struktury nie-kählerowskie oraz powierzchnie silnie pseudowklęsłe nie są przejawem geometrycznego chaosu, lecz stanowią laboratorium elastyczności strukturalnej. Autor dowodzi, że brak klasycznej regularności otwiera drogę do fascynujących odkryć: od istnienia nieprzeliczalnej liczby struktur zespolonych na topologicznie prostej przestrzeni $\mathbb{R}^4$, po możliwość realizacji dowolnej dodatniej rozmaitości kontaktowej jako brzegu nieskończenie wielu wypełnień holomorficznych. Poprzez syntezę analizy zespolonej, topologii czterowymiarowej i geometrii kontaktowej, tekst rzuca wyzwanie intuicji utożsamiającej prostotę topologiczną z jednoznacznością analityczną. W efekcie kählerowskość przestaje być jedynym miernikiem wartości przestrzeni, a staje się jednym z wielu trybów organizacji materii geometrycznej, obok którego współistnieją systemy oparte na logice realizacji i konstrukcyjnej swobodzie.

SŁOWA KLUCZOWE

geometria nie-kählerowska | struktury pseudowklęsłe | teoria Naohiko Kasuyi | rozmaitości Kählera | powierzchnie zespolone | klasyfikacja Kodairy | wymiar algebraiczny a(V) | rozwłóknienia Lefschetza | geometria kontaktowa i symplektyczna | wypełnienia holomorficzne | powierzchnie klasy VII | twierdzenie Riemanna-Rocha | struktury zespolone na R4 | chirurgie kontaktowe Dehna

Napięcie między lokalną gładkością a globalnym rygorem

Geometria zespolona oscyluje między regularnością a oporem materii. Zaczyna się od pozornie łagodnej idei: badania przestrzeni, które lokalnie przypominają wielowymiarową przestrzeń liczb zespolonych. W tym „lokalnie" kryje się jednak cała dramaturgia dyscypliny. W małej skali wiele struktur wygląda niewinnie; krzywa wydaje się prosta, powierzchnia płaska, a rozmaitość zespolona może sprawiać wrażenie analitycznego salonu, gdzie każda funkcja zna swoje miejsce, współrzędne zachowują dobre maniery, a przejścia między mapami odbywają się holomorficznie – z rygorem znacznie silniejszym niż zwykła gładkość. Geometria nie rozgrywa się jednak wyłącznie lokalnie. Prawdziwy charakter struktury poznajemy dopiero w skali globalnej: w obiegu funkcji, istnieniu

krzywych, wiązkach i osobliwościach, a także w możliwościach zanurzenia – czyli w sposobach, w jakie lokalna zgodność lubi zamieniać się w globalny konflikt. Rozmaitość zespolona to coś więcej niż gładka przestrzeń z dodatkowym aparatem analitycznym; to przestrzeń, w której pojęcie funkcji holomorficznej pełni rolę konstytucji. Funkcja ta nie jest jedynie narzędziem obliczeniowym, lecz testem struktury. To ona rozdziela punkty, opisuje lokalne współrzędne i pozwala odróżnić przestrzenie Steina od tych bardziej opornych, ujawniając jednocześnie, czy dana rozmaitość nadaje się do zanurzenia w przestrzeń afiniczną lub rzutową. W tej teorii nie wystarczy stwierdzenie, że przestrzeń jest „gładka". Gładkość jest dopiero grzecznym początkiem rozmowy. Pytanie brzmi: czy przestrzeń pozwala na opis przez funkcje holomorficzne w sposób dostatecznie bogaty, czy też skrywa deficyty nie do naprawienia samą topologią? Książka Kasuyi sytuowana jest właśnie na tej granicy. Według opisu wydawniczego Springer jej głównymi tematami są nie-kählerowskie i silnie pseudowklęsłe powierzchnie zespolone. Autor ukazuje je jako obszary, które choć długo pozostawały w cieniu rozmaitości Kählera i silnej pseudowypukłości, ujawniają głębokie związki z topologią różniczkową oraz geometrią kontaktową i symplektyczną. Opis ten trafnie oddaje sens materiału źródłowego: nie chodzi o zaprzeczenie klasycznemu centrum geometrii zespolonej, lecz o przesunięcie uwagi ku temu, co było spychane na peryferie jako mniej regularne, mniej algebraiczne i mniej podatne na standardowe narzędzia. Najpierw trzeba jednak zrozumieć, czym właściwie jest owo centrum.

Rozmaitości Kählera jako model harmonii i granice topologicznej kontroli

W geometrii zespolonej szczególną rolę odgrywają rozmaitości Kählera. Są one miejscem spotkania trzech języków: zespolonego, riemannowskiego i symplektycznego. Rozmaitość ta posiada strukturę zespoloną – operator J, który formalnie zachowuje się jak mnożenie przez jednostkę urojoną – oraz zgodną z nią metrykę hermitowską. Z połączenia metryki i struktury zespolonej powstaje dwuforma, nazywana formą Kählera. Gdy forma ta jest zamknięta, przestrzeń osiąga szczególny poziom zgodności: analiza zespolona, geometria metryczna i topologia różniczkowa zaczynają mówić jednym językiem. To właśnie dlatego rozmaitości Kählera są tak wygodne, płodne i dominujące. Przypominają dobrze napisany kodeks: nie usuwają wszystkich sporów, ale sprawiają, że spory mają wspólną procedurę.

Warto podkreślić, że do przykładów regularnych przestrzeni Kählera należą rozmaitości rzutowe oraz niektóre powierzchnie K3. Jedną z charakterystycznych konsekwencji kählerowskości jest parzystość nieparzystych liczb Bettiego. W przypadku zwartych powierzchni zespolonych

(rozmaitości zespolonych wymiaru dwa) pojawia się szczególnie eleganckie kryterium: według twierdzenia Kodairy, Miyaoki i Siu zwarta powierzchnia zespolona jest kählerowska wtedy i tylko wtedy, gdy jej pierwsza liczba Bettiego jest parzysta.

To zdanie ma wagę większą, niż sugeruje jego techniczna forma. Mówi ono, że w wymiarze zespolonym dwa własność analityczno-geometryczna zostaje uchwycona przez niezmiennik topologiczny. Innymi słowy: niekiedy topologia umie podsłuchać geometrię.

W tym miejscu pojawia się podejrzliwość, bez której matematyka byłaby tylko księgowością definicji. Czy każde istotne rozróżnienie geometryczne da się sprowadzić do topologii? Czy fakt, że zwarta powierzchnia zespolona z nieparzystym b1 nie jest kählerowska, pozwala nam zrozumieć wszystkie formy nie-kählerowskości? Nie. To byłoby zbyt wygodne, a więc podejrzane. Materiał źródłowy trafnie wskazuje, że przejście od powierzchni zwartych do otwartych komplikuje sytuację zasadniczo. Z topologicznego punktu widzenia każda otwarta, zorientowana rozmaitość czterowymiarowa dopuszcza metrykę Kählera, zatem sama topologia nie wystarcza do odróżnienia struktur kählerowskich od nie-kählerowskich.

Tam, gdzie zwartość dawała twardą kontrolę, otwartość wprowadza swobodę. Ta ostatnia jest jednak piękna dopiero wtedy, gdy dysponujemy narzędziami pozwalającymi odróżnić prawdę od kaprysu. Kasuya i przywoływane przez niego konstrukcje sięgają po subtelniejsze kryteria. Jedno z nich głosi, że jeżeli rozmaitość zespolona zawiera zwartą krzywą zespoloną reprezentującą trywialną drugą klasę homologii, to rozmaitość ta nie może być kählerowska. Intuicja jest następująca: forma Kählera, będąc formą zamkniętą i dodatnią, powinna dodatnio mierzyć objętość krzywej zespolonej. Jeżeli jednak klasa homologii tej krzywej jest trywialna, całkowanie zamkniętej formy po niej musiałoby dać zero. Powstaje sprzeczność między dodatniością geometryczną a trywialnością homologiczną. Tak właśnie działa dobra matematyczna diagnoza: nie krzyczy, nie moralizuje, tylko znajduje miejsce, w którym dwa warunki nie mogą jednocześnie oddychać. Na tym tle należy czytać klasyfikację zwartych powierzchni zespolonych. Kasuya przyjmuje oryginalną klasyfikację Kodairy, choć współcześnie częściej stosuje się klasyfikację Enriquesa-Kodairy.

Wybór ten nie jest przypadkowy. Oryginalny podział lepiej uwydatnia rolę powierzchni nie-kählerowskich i eliptycznych – tych, które w analizowanej książce stają się pierwszoplanowe. Klasyfikacja nie jest tu muzealnym katalogiem, lecz mapą napięć między algebraicznością, eliptycznością, kählerowskością a nie-kählerowską odmiennością. Centralnym niezmiennikiem jest wymiar algebraiczny a(V), mierzony przez stopień przestępny ciała funkcji meromorficznych na powierzchni. Może on przyjmować wartości zero, jeden albo dwa. Gdy a(V)=2, powierzchnia jest rzutową powierzchnią algebraiczną. Gdy a(V)=1, powierzchnia jest eliptyczna, czyli dopuszcza holomorficzne rozwłóknienie z włóknem będącym krzywą eliptyczną nad rzutową krzywą

algebraiczną. Gdy a(V)=0, klasyfikacja wymaga dalszego rozróżnienia według pierwszej liczby Bettiego: b1=4 prowadzi do torusa zespolonego, b1=1 do powierzchni klasy VII, a b1=0 do powierzchni K3.

To techniczne rozgałęzienie ma głęboki sens filozoficzny. Wymiar algebraiczny mówi nam, ile funkcji meromorficznych przestrzeń „dopuszcza" jako narzędzia globalnego opisu. Przestrzeń algebraiczna jest bogata w takie funkcje; przestrzeń o wymiarze algebraicznym zero jest skąpa, oporna i milcząca. Nie chodzi o to, że nie istnieje – przeciwnie, istnieje aż nadto intensywnie – ale nie chce mówić językiem algebraicznej przejrzystości. Dla geometrii jest to sytuacja podobna do kontaktu z instytucją, która formalnie działa, lecz nie produkuje dokumentów, dzięki którym można by ją prosto rozliczyć. Trzeba wtedy zmienić metodę badania.

Nie-kählerowska alternatywa w klasyfikacji Kodairy

W oryginalnej klasyfikacji Kodairy, rekonstruowanej w notatce, wyróżnia się siedem klas powierzchni: płaszczyznę rzutową i powierzchnie prostokreślne, powierzchnie K3, torusy zespolone, kählerowskie powierzchnie eliptyczne, powierzchnie algebraiczne typu ogólnego, nie-kählerowskie powierzchnie eliptyczne oraz nie-kählerowskie powierzchnie klasy VII. Szczególnie istotne są klasy VI i VII.

To one przechowują nie-kählerowską alternatywę. Klasa VI obejmuje nie-kählerowskie powierzchnie eliptyczne z nieparzystą pierwszą liczbą Bettiego większą lub równą trzy, natomiast klasa VII obejmuje nie-kählerowskie powierzchnie z b1=1. Nie-kählerowskość nie jest jednak jednorodnym brakiem. To nie jest po prostu „nieposiadanie metryki Kählera" – podobnie jak bezrobocie nie jest jednolitą kategorią egzystencjalną, a brak aplikacji nie oznacza jeszcze, że ktoś jest wolny od technologii. Wśród powierzchni nie-kählerowskich występują różne typy: powierzchnie Hopfa, Kodairy, Inoue oraz Inoue-Hirzebrucha. Każda z tych rodzin posiada własną logikę.

Powierzchnie Hopfa należą do klasy VII, mają b1=1, a ich uniwersalną przestrzenią nakrywającą jest C2\ {0}. Pierwotne powierzchnie Hopfa są dyfeomorficzne z S3×S1. Powierzchnie Kodairy występują w wariancie pierwotnym i wtórnym: te pierwsze należą do klasy VI, drugie zaś do klasy VII; stanowią klasyczne przykłady struktur zespolonych i symplektycznych, które mimo to nie dopuszczają metryki Kählera. Powierzchnie Inoue wyróżniają się brakiem zwartych krzywych zespolonych, natomiast powierzchnie Inoue-Hirzebrucha zawierają charakterystyczne cykle krzywych wymiernych.

Nie-kählerowskość jako struktura i aparat narzędziowy geometrii zespolonej

To zróżnicowanie ma kluczowe znaczenie metodologiczne. Początkujący czytelnik, słysząc termin "nie-kählerowskie", może odruchowo uznać go za kategorię negatywną, opisującą geometrię defektu. To błąd. Nie-kählerowskość jest raczej laboratorium oporu wobec nadmiernej harmonizacji. Dowodzi ona, że struktura zespolona może istnieć poza kählerowskim kompromisem; że symplektyczność nie zawsze prowadzi do kählerowskości, a obecność lub brak krzywych zespolonych fundamentalnie zmienia charakter przestrzeni. Globalna geometria nie jest tu prostą sumą lokalnych zachowań. Matematyka mówi w tym miejscu coś, co nauki społeczne powinny sobie wypisać nad biurkiem: brak jednego modelu regularności nie oznacza braku struktury. Często oznacza po prostu, że patrzymy niewłaściwym aparatem.

Aparat ten zaczyna się od podstawowych narzędzi geometrii zespolonej. Jednym z nich jest rozdmuchanie – operacja zastąpienia punktu krzywą wymierną o ujemnej samo-intersekcji, zwaną krzywą wyjątkową. W topologii różniczkowej wymiaru cztery odpowiada to sumie spójnej z odwróconą orientacją płaszczyzną rzutową zespoloną. Rozdmuchanie pięknie obrazuje różnicę między myśleniem punktowym a geometrycznym. Punkt wydaje się niczym: bezwymiarowym znakiem. A jednak w geometrii zespolonej można go zastąpić całą krzywą. To nie kosmetyka, lecz zmiana lokalnej anatomii przestrzeni. Jest to tak, jakby w miejscu administracyjnej kropki na mapie nagle ujawniła się cała instytucja z własnymi korytarzami, procedurami i historią.

Z rozdmuchaniami wiąże się pojęcie minimalności. Twierdzenie Castelnuovo mówi, że każdą zwartą powierzchnię zespoloną można redukować poprzez ściąganie odpowiednich krzywych wyjątkowych do powierzchni minimalnej – takiej, która nie zawiera żadnych (−1)-krzywych. Minimalność nie oznacza tu prostoty w banalnym sensie, lecz brak pewnych redukowalnych nadmiarów. W klasyfikacji powierzchni jest to etap oczyszczania struktury z elementów powstałych przez rozdmuchania, które można odwrócić. Matematyka przypomina tu starą zasadę rzetelnej analizy: zanim zaczniesz klasyfikować, usuń artefakty procedury.

Drugim zestawem narzędzi są dywizory i holomorficzne wiązki liniowe. Dywizor to formalna kombinacja nierozkładalnych podzbiorów analitycznych kowymiaru jeden. Każdemu z nich można przyporządkować holomorficzną wiązkę liniową, a klasy takich wiązek tworzą grupę Picarda. Szczególną rolę pełni wiązka kanoniczna, której przekrojami są globalne holomorficzne formy najwyższego stopnia. Choć język ten może wydawać się hermetyczny, jego funkcja jest prosta: pozwala przełożyć geometrię podzbiorów na algebrę wiązek, a tę z kolei na dane kohomologiczne.

To wielka siła geometrii algebraicznej i zespolonej – umiejętność zamiany kształtu na rachunek i rachunku z powrotem na kształt.

Tutaj pojawia się teoria snopów i ich kohomologii. Snop przyporządkowuje zbiorom otwartym lokalne dane, na przykład kiełki funkcji holomorficznych, jednak jego prawdziwa moc tkwi w badaniu możliwości globalnego sklejenia tych danych. To jedna z najgłębszych idei nowoczesnej matematyki: problem globalny nie sprowadza się jedynie do posiadania poprawnych elementów lokalnych, lecz do możliwości ich zgodnego połączenia. W języku instytucjonalnym: można mieć znakomite departamenty, a mimo to fatalne państwo, jeśli zawodzi mechanizm koordynacji. Snopy formalizują właśnie tę różnicę między lokalną kompetencją a globalną spójnością.

Z ciągu wykładniczego snopów i długiego ciągu dokładnego kohomologii wynika możliwość klasyfikacji holomorficznych wiązek liniowych przez pierwszą klasę Cherna oraz elementy jakobianu. Klasy Cherna są topologicznymi śladami wiązek; wskazują, jak bardzo dana wiązka jest skręcona i w jakim stopniu odbiega od trywialnego produktu. Dzięki nim geometria lokalnych włókien zyskuje mierzalny wymiar globalny. To kolejny dowód na to, że w geometrii zespolonej prawda o całości nie daje się sprowadzić do sumy prawd o małych fragmentach. Do tego dochodzi wzór dołączenia, który pozwala wyrazić wiązkę kanoniczną gładkiej hiperpowierzchni przez geometrię przestrzeni otaczającej i dywizor tej hiperpowierzchni. W praktyce jest to narzędzie pozwalające zrozumieć, jak podprzestrzeń dziedziczy i przekształca geometrię większej całości. Nie jest ona biernym fragmentem – posiada własną kanoniczną strukturę, która wynika z relacji z otoczeniem. To bardzo kulturalne twierdzenie: przypomina, że tożsamość obiektu nie jest ani czystą autonomią, ani prostym odbiciem środowiska, lecz relacją między własnym kształtem a warunkami osadzenia.

Twierdzenie Riemanna-Rocha, dwoistość Serre'a i holomorficzna charakterystyka Eulera pozwalają z kolei przewidywać wymiary przestrzeni globalnych przekrojów wiązek. W klasyfikacji powierzchni nie chodzi przecież tylko o to, jakie obiekty istnieją, ale ile istnieje globalnych sekcji, jak zachowują się wiązki kanoniczne, czy można zbudować odwzorowania do przestrzeni rzutowych i czy geometria produkuje wystarczająco dużo funkcji, aby sama siebie opisać. W tle działa twierdzenie Siegela: zbiór funkcji meromorficznych na zwartej rozmaitości tworzy ciało skończonego stopnia przestępnego, a właśnie ten stopień wyznacza wymiar algebraiczny. Jest on zatem miarą globalnej ekspresji meromorficznej. Przestrzeń bogata w funkcje meromorficzne mówi dużo. Przestrzeń uboga zmusza nas do słuchania ciszy.

W tym momencie można już dostrzec główną intencję analizowanego materiału. Nie chodzi o encyklopedyczne zebranie definicji, choć są one niezbędne.

Napięcie między rygorem kählerowskim a elastycznością struktur

Geometria zespolona rozwija się w napięciu między modelami dobrze kontrolowanymi a strukturami, które wymykają się klasycznym rygorom, nie stając się jednak chaosem. Rozmaitości Kählera, powierzchnie rzutowe, przestrzenie Steina i pseudowypukłość tworzą jedną stronę tej historii: stronę dyscypliny, wypukłości, funkcji wyczerpujących, zanurzeń, dodatniości i koherencji. Po przeciwnej stronie znajdują się powierzchnie nie-kählerowskie, konstrukcje Calabiego-Eckmanna, nie-kählerowskie struktury na $\mathbb{R}^4$, pseudowklęsłość i kontaktowe brzegi – obszar elastyczności, wyjątków i operacji chirurgicznych, gdzie brzegi nie zachowują się jak klasyczne domeny holomorficzności.

Książka Kasuyi jest w tym kontekście niezwykle cenna. Wydawnictwo Springer podkreśla, że badania nad niezwartymi powierzchniami nie-kählerowskimi oraz powierzchniami silnie pseudowklęsłymi są wciąż na relatywnie wczesnym etapie i oferują wiele obszarów do rozwoju. Nie jest to zatem wyłącznie podręcznikowa rekonstrukcja znanego krajobrazu, lecz raczej raport z pogranicza. A pogranicza w nauce bywają najciekawsze, bo tam kończy się elegancja gotowych klasyfikacji, a zaczyna prawdziwa robota: budowanie mostów między analizą zespoloną, topologią różniczkową, geometrią kontaktową i symplektyczną. Matematyka, która nie wychodzi z salonu, prędzej czy później zaczyna mylić parkiet z kosmosem.

Kolejny krok prowadzi ku powierzchniom eliptycznym i rozwłóknieniom Lefschetza. To one pokazują, jak geometria zespolona przechodzi w topologię czterowymiarową i dlaczego osobliwe włókna, cykle znikające oraz monodromie nie są technicznymi ozdobnikami, lecz mechanizmami klasyfikacyjnymi. Ujawnia się tu jedna z najważniejszych idei całego artykułu: przestrzeń można rozumieć nie tylko przez to, czym jest jako całość, lecz także przez to, jak rozpada się na włókna i jakie ślady zostawia po sobie degeneracja.

Jeśli pierwsza część prowadziła nas przez podstawowy język geometrii zespolonej, teraz czas wejść w jej mechanikę dynamiczną. Powierzchnia zespolona nie musi być rozumiana wyłącznie jako zamknięta całość z przypisaną listą niezmienników; może być badana poprzez sposób, w jaki rozkłada się na rodziny krzywych. Zamiast patrzeć na przestrzeń jak na nieruchomy obiekt, zaczynamy widzieć ją jako system zależności: nad każdym punktem bazy znajduje się włókno – zwykle gładkie, czasem osobliwe lub degenerujące, ale zawsze niosące informację o całej strukturze. Klasyfikacja przestaje być tylko katalogiem typów, a staje się analizą sposobów, w jakie regularność może się załamać, nie tracąc przy tym sensu.

Powierzchnie eliptyczne zajmują w tej historii miejsce szczególne, stanowiąc jeden z najważniejszych pomostów między geometrią algebraiczną, analizą zespoloną i topologią różniczkową. W klasyfikacji Kodairy pojawiają się wtedy, gdy wymiar algebraiczny powierzchni wynosi jeden: powierzchnia dopuszcza holomorficzne rozwłóknienie nad krzywą algebraiczną, a typowym włóknem jest krzywa eliptyczna. Zwięźle ujęto to w notatce źródłowej: gdy $a(V)=1$, powierzchnia jest powierzchnią eliptyczną, czyli dopuszcza holomorficzne rozwłóknienie z włóknem w postaci krzywej eliptycznej nad rzutową krzywą algebraiczną. To zdanie jest kluczem do całego przejścia: powierzchnia eliptyczna nie jest tylko "powierzchnią z torusami", lecz przestrzenią, której globalna geometria zostaje zakodowana w rodzinie krzywych eliptycznych i sposobach ich degeneracji.

Krzywa eliptyczna, choć w nazwie brzmi niepozornie, jest jednym z najbardziej pracowitych obiektów matematyki. W geometrii zespolonej można ją postrzegać jako jednowymiarowy torus zespolony, czyli iloraz płaszczyzny zespolonej przez kratę. Topologicznie jest torusem, analitycznie zwartą krzywą zespoloną rodzaju jeden, a algebraicznie może być opisana równaniem kubicznym bez osobliwości. Posiada więc trzy twarze: topologiczną, analityczną i algebraiczną.

Degeneracja jako moment objawienia struktury

To dlatego tak dobrze nadaje się na włókno w teorii powierzchni. Jest wystarczająco regularna, by móc ją kontrolować, a jednocześnie na tyle bogata, że jej degeneracje niosą konkretną treść. Degeneracja włókna to jedno z kluczowych pojęć tej części. W potocznym języku brzmi ona jak upadek formy, utrata jakości czy przejście od elegancji do defektu. W matematyce bywa odwrotnie: degeneracja jest momentem objawienia. Gładkie włókno często mówi niewiele, bo zachowuje się zgodnie z oczekiwaniami. Włókno osobliwe ujawnia natomiast miejsce, w którym struktura musiała pójść na kompromis. To trochę jak z instytucjami: dopóki wszystko działa, nikt nie dostrzega mechanizmu; gdy pojawia się kryzys, wychodzi na jaw rzeczywista architektura procedur. W geometrii osobliwości są właśnie takimi kryzysami formalnymi. Nie stanowią brudu na idealnym obrazie, lecz są sposobem, w jaki obraz pokazuje własną konstrukcję.

Typowym przykładem łączącym pseudowypukłość, przestrzenie Steina i teorię osobliwości jest włókno Milnora. Jeżeli wielomian zespolony ma izolowany punkt krytyczny, to splot tej osobliwości ze sferą daje silnie pseudowypukłą rozmaitość CR, a regularna poziomica tworzy włókno Milnora – przykład gładkiej rozmaitości Steina. Już tutaj pojawia się schemat myślenia, który powróci w rozwłóknieniach Lefschetza: osobliwość nie jest końcem analizy, lecz początkiem subtelniejszej

klasyfikacji. Wokół niej można badać splot, monodromię, włókno, brzeg czy strukturę kontaktową. Lokalne pęknięcie staje się źródłem danych globalnych.

Rozwłóknienia Lefschetza wprowadzają tę logikę do topologii czterowymiarowej jako różniczkowo-topologiczny odpowiednik rozwłóknień eliptycznych znanych z geometrii zespolonej. Formalnie mamy tu do czynienia z odwzorowaniem gładkim z zamkniętej, zorientowanej rozmaitości czterowymiarowej do rozmaitości dwuwymiarowej. Poza skończoną liczbą wartości krytycznych zachowuje się ono jak zwykłe rozwłóknienie. W punktach krytycznych pojawiają się osobliwości Lefschetza, lokalnie modelowane w zespolonych współrzędnych równaniem w=z1 z2.

Wzór ten jest krótki, ale jego konsekwencje są ogromne. Oznacza on, że degeneracja posiada standardowy lokalny model; tam, gdzie moglibyśmy spodziewać się dzikiego chaosu, pojawia się kontrolowana forma singularności. Kluczowym pojęciem jest tu cykl znikający – pętla w regularnym włóknie, która w miarę zbliżania się do wartości krytycznej kurczy się do punktu osobliwego. Gdyby matematyka miała własną ikonografię egzystencjalną, cykl znikający byłby jednym z jej najsilniejszych symboli. Coś, co w gładkim świecie jest pętlą i nośnikiem topologicznej pamięci, w chwili degeneracji znika w punkcie. Nie znika jednak bez śladu: jego zanik koduje monodromię, czyli zachowanie włókien przy obejściu wartości krytycznej. W klasycznym rozwłóknieniu Lefschetza monodromia wokół wartości krytycznej jest prawoskrętnym obrotem Dehna. Jest to operacja na powierzchni polegająca na wycięciu pierścieniowego otoczenia krzywej, jej skręceniu i ponownym sklejeniu. W teorii rozmaitości trój- i czterowymiarowych takie działania są czymś więcej niż techniczną manipulacją – stanowią alfabet zmian topologicznych.

Jeżeli cykl znikający wskazuje, gdzie włókno traci regularność, to obrót Dehna mówi, jak ta utrata wpływa na globalne sklejenie rodziny włókien. Monodromia jest zatem pamięcią ruchu wokół osobliwości; nie opisuje samego punktu krytycznego, lecz to, co dzieje się z przestrzenią podczas próby jego ominięcia. Takie spojrzenie pozwala zrozumieć, dlaczego rozwłóknienia Lefschetza stały się kluczowe dla klasyfikacji powierzchni eliptycznych. Twierdzenie Kasa i Moishezona głosi, że każde rozwłóknienie eliptyczne bez włókien wielokrotnych można zdeformować tak, aby posiadało wyłącznie proste włókna osobliwe typu I1, stając się tym samym rozwłóknieniem Lefschetza. W rezultacie typ dyfeomorfizmu relatywnie minimalnej powierzchni eliptycznej nad CP1 zależy wyłącznie od jej charakterystyki Eulera i jest topologicznie równoważny konstrukcji E(m). To wynik o głębokim znaczeniu klasyfikacyjnym.

Oznacza on, że z pozoru skomplikowana geometria powierzchni eliptycznych może zostać sprowadzona – po odpowiedniej deformacji – do systemu prostych osobliwości i ich globalnego rachunku. Wymierna powierzchnia eliptyczna E(1) jest najprostszym przykładem takiej struktury: stanowi rozwłóknienie nad S2 i ma dokładnie dwanaście włókien osobliwych typu I1. Z niej,

poprzez specyficzną sumę spójną na włóknach, można konstruować powierzchnie E(m), posiadające 12m włókien osobliwych. Sama liczba dwanaście ma tu charakter matematyczny, nie mistyczny, choć humanista oczywiście musi mocno trzymać się krzesła, żeby nie zacząć widzieć w niej zodiaku, apostołów i kompletu filiżanek w serwisie po babci.

Achiralność i topologiczne fundamenty struktur nie-kählerowskich

Kluczowe jest jednak to, że liczba włókien osobliwych staje się nośnikiem charakterystyki Eulera i elementem klasyfikacji topologicznej. Yukio Matsumoto rozszerzył ten obraz, wykazując, że topologia powierzchni eliptycznej bez włókien wielokrotnych zależy od dwóch parametrów: rodzaju bazy oraz charakterystyki Eulera całej przestrzeni. To kolejny przykład redukcji bogactwa geometrycznego do zestawu twardych niezmienników topologicznych. Jak zwykle w dobrej matematyce, redukcja nie oznacza tu banalizacji, lecz odkrycie tego, które parametry faktycznie niosą informację. Nie wszystko, co wygląda skomplikowanie, jest istotne klasyfikacyjnie; nie każdy techniczny detal decyduje o typie dyfeomorfizmu.

Jeszcze ciekawiej robi się w momencie, gdy klasyczne rozwłóknienia Lefschetza zostają rozszerzone do rozwłókнień achiralnych. W przypadku klasycznym osobliwości odpowiadają prawoskrętnym obrotom Dehna, a lokalny model ma postać holomorficzną. Rozwłóknienia achiralne dopuszczają natomiast osobliwości negatywne, modelowane wzorem zawierającym sprzężenie zespolone, co odpowiada lewoskrętnemu obrotowi Dehna. W tym punkcie geometria przechodzi subtelną zmianę orientacji. Pojawienie się negatywnych osobliwości oznacza dopuszczenie lokalnych zachowań niezgodnych z holomorficzną chiralią klasycznego modelu. Struktura staje się bardziej elastyczna, ale i bardziej niepokorna.

Kulminacją jest rozwłóknienie Matsumoto-Fukayi: achiralne rozwłóknienie w torusy na sferze S^4 z bazą S^2, zawierające jedną osobliwość pozytywną i jedną negatywną. Konstrukcja ta ma fundamentalne znaczenie dla dalszej części wywodu, gdyż staje się szkieletem topologicznym wykorzystanym przez Kasuyę i współpracowników do budowy nie-kählerowskich struktur zespolonych na $\mathbb{R}^4$.

W tej jednej konstrukcji spotykają się dwa światy: sfera czterowymiarowa oraz eliptyczne rozwłóknienie z osobliwościami o przeciwnych znakach. To minimalistyczna maszyna, która po uruchomieniu produkuje konsekwencje niewspółmierne do swojej zwartej definicji.

Klasyczna geometria zespolona przyzwyczaja nas do przekonania, że struktury zespolone rozwijają się najpełniej tam, gdzie są kompatybilne z metryką Kählera, gdzie istnieje bogactwo funkcji meromorficznych i gdzie przestrzeń można kontrolować algebraicznie lub przez funkcje ściśle plurisubharmoniczne. Rozwłóknienia achiralne, a zwłaszcza konstrukcja Matsumoto-Fukayi, sugerują coś innego: topologia czterowymiarowa dysponuje własną zdolnością generowania struktur, których nie wolno oceniać wyłącznie miarą klasycznej algebraicznej elegancji. To nie bunt przeciw regularności, lecz pytanie o to, czy regularność nie była dotąd definiowana zbyt wąsko.

Kiedy Kasuya łączy tę topologiczną maszynę z geometrią nie-kählerowską, wyłania się jeden z najważniejszych wątków materiału: możliwość budowania struktur zespolonych tam, gdzie intuicja euklidesowa spodziewałaby się trywialności. Przestrzeń $\mathbb{R}^4$ wydaje się przecież, z punktu widzenia topologii elementarnej, prosta – jest kontraktowalna, bez dziur i oczywistych globalnych komplikacji.

A jednak w geometrii zespolonej wymiaru dwa pojawia się pytanie: czy można nadać jej nie-kählerowską strukturę zespoloną? Pytanie to brzmi wprost: czy istnieją nie-kählerowskie struktury zespolone na standardowej przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^{2n}$? Dla $n=1$, czyli dla krzywych zespolonych, odpowiedź jest negatywna. Dla $n \ge 2$ sytuacja zmienia się zasadniczo. W wymiarach wyższych ($n \ge 3$) można sięgnąć po konstrukcję Calabiego-Eckmanna z 1953 roku. Autorzy ci zbudowali struktury zespolone na iloczynach nieparzystowymiarowych sfer $S^{2p+1} \times S^{2q+1}$, będących holomorficznymi rozwłóknieniami w krzywe eliptyczne. Ponieważ takie rozmaitości mają trywialną drugą grupę kohomologii de Rhama, są nie-kählerowskie. Po wycięciu otwartej komórki najwyższego wymiaru uzyskuje się przestrzeń dyfeomorficzną z $\mathbb{R}^{2(p+q+1)}$, wyposażoną w nie-kählerowską strukturę zespoloną. Konstrukcja ta dowodzi, że nie-kählerowskość może wystąpić nawet na przestrzeni topologicznie euklidesowej, o ile wymiar jest dostatecznie wysoki.

W przypadku $\mathbb{R}^4$, czyli wymiaru zespolonego dwa, metoda ta zawodzi. Wycięta otwarta komórka prowadziłaby do podzbioru $\mathbb{C}^2$, który posiada trywialną strukturę Kählera. Wymiar cztery po raz kolejny okazuje się granicą osobliwości. Nie jest ani tak prosty jak wymiar dwa rzeczywisty, ani tak swobodny jak wyższe wymiary. To wymiar, w którym topologia lubi płatać figle nawet profesjonalistom; amatorom zaś od razu wywraca stolik, żeby nie tracili czasu na złudzenia.

Rozwiązanie Di Scali, Kasuyi i Zuddasa wykorzystuje właśnie szkielet rozwłóknienia Matsumoto-Fukayi. Konstrukcja łączy kanoniczny model otoczenia osobliwego włókna eliptycznego typu I_1 z iloczynem holomorficznego pierścienia i dysku, a następnie skleja te fragmenty analitycznie, tworząc otwartą powierzchnię zespoloną $E(\rho_1,\rho_2)$, dyfeomorficzną z $\mathbb{R}^4$.

Nie jest to proste „nałożenie” struktury zespolonej na gotową przestrzeń. To raczej operacja chirurgiczno-analityczna, w której topologiczny szkielet zostaje wykorzystany do zbudowania nowej geometrii.

Nieprzeliczalna różnorodność nie-kählerowskich struktur na rozmaitościach czterowymiarowych

Własności modelu E(ρ1,ρ2) mają fundamentalne znaczenie. Powierzchnia ta posiada suriektywne holomorficzne rozwłóknienie nad sferą Riemanna CP1, którego włókna przyjmują trzy formy: gładkie krzywe eliptyczne, osobliwe włókno typu I1 oraz holomorficzne pierścienie. Otrzymujemy strukturę, która topologicznie jest przestrzenią R4, lecz analitycznie niesie bogate rozwłóknienie wraz z towarzyszącą mu osobliwością. To znakomity przykład matematycznej lekcji przeciwko powierzchownemu realizmowi. Nie wystarczy bowiem wiedzieć, „jaka to przestrzeń” w sensie topologicznym; należy zapytać, jaką strukturę zespoloną na niej osadzono. Wniosek końcowy jest jeszcze bardziej radykalny: na R4 istnieje nieprzeliczalnie wiele parami nie-biholomorficznych, nie-kählerowskich struktur zespolonych. Ich odmienność wynika z rzeczywistych parametrów ρ1 i ρ2, które prowadzą do geometrycznie różnych przestrzeni. To zdanie powinno działać jak zimny prysznic na każdego, kto utożsamia prostotę przestrzeni euklidesowej z jednoznacznością jej możliwych struktur.

R4 nie jest tu nudną sceną, na której można odegrać tylko jedną sztukę. Jest raczej pustym teatrem, w którym reżyseria zespolona potrafi wystawić nieprzeliczalnie wiele spektakli, z których każdy rządzi się inną logiką analityczną. Co więcej, korzystając z twierdzenia Phillipsa o submersjach, wynik ten można rozszerzyć do znacznie szerszej tezy: każda spójna, otwarta i orientowalna czterowymiarowa rozmaitość gładka dopuszcza nieprzeliczalnie wiele nie-kählerowskich struktur zespolonych. Wystarczy zanurzyć w niej modelowe R4 z odpowiednią strukturą E(ρ1,ρ2) i przedłużyć tę strukturę na całą rozmaitość. To rezultat o ogromnej sile konceptualnej: nie-kählerowskość przestaje być wyjątkiem zarezerwowanym dla egzotycznych, zwartych obiektów, a staje się powszechną cechą otwartych czterowymiarowych światów.

Nie-kählerowskość jako laboratorium elastyczności strukturalnej

Jak interpretować te wnioski w szerszym porządku artykułu? Przede wszystkim nie należy popełniać błędu naiwnego antykählerowskiego triumfalizmu. Nie chodzi o to, że struktury Kählera są przereklamowane, a nie-kählerowskie stają się „bardziej prawdziwe" tylko dlatego, że są trudniejsze. Takie myślenie byłoby jedynie akademicką wersją snobizmu na brzydkie buty.

Rozmaitości Kählera pozostają centralne, potężne i głęboko uzasadnione. Chodzi raczej o to, że geometria zespolona nie kończy się na nich. W obszarach otwartych, w wymiarze cztery, przy obecności rozwłóknień achiralnych oraz w konstrukcjach opartych na osobliwych włóknach i pierścieniach holomorficznych wyłania się inny paradygmat: paradygmat elastyczności strukturalnej.

Będzie on jeszcze wyraźniejszy w drugiej połowie książki Kasuyi, poświęconej silnej pseudowypukłości, pseudowklęsłości i geometrii kontaktowej. Widać tam zapowiedź najważniejszego przesunięcia. W świecie pseudowypukłym i Steinowskim dominuje rygor: funkcje wyczerpujące, holomorficzna wypukłość, zanurzenia i silne ograniczenia brzegów. Z kolei w świecie pseudowklęsłym pojawia się zaskakująca elastyczność: każda dodatnia, zamknięta trójwymiarowa rozmaitość kontaktowa dopuszcza nieskończenie wiele wklęsłych wypełnień holomorficznych. To nie jest przypadkowa analogia. Pierwsza część książki przygotowuje nas do zrozumienia, że to, co nie-kählerowskie i nieklasycznie regularne, nie jest odpadem teorii. Jest jej laboratorium.

Powierzchnie eliptyczne i rozwłóknienia Lefschetza uczą zatem trzech rzeczy. Po pierwsze, globalną powierzchnię można rozumieć poprzez rodzinę włókien, a jej osobliwości są nośnikami informacji, a nie tylko miejscami awarii. Po drugie, topologia czterowymiarowa potrafi przechowywać subtelne dane geometryczne, szczególnie za sprawą monodromii, cykli znikających i operacji Dehna. Po trzecie, nie-kählerowskie struktury zespolone nie są marginalnym dodatkiem do klasyfikacji, lecz pełnoprawnym sposobem organizacji przestrzeni – zwłaszcza gdy zwartość przestaje narzucać klasyczne ograniczenia.

Po analizie powierzchni eliptycznych i rozwłóknień Lefschetza należy wrócić do pytania bardziej podstawowego, choć wcale nie prostszego: kiedy przestrzeń zespolona jest dostatecznie bogata w funkcje holomorficzne, aby uznać ją za analitycznie dobrze uformowaną? W klasycznej geometrii zespolonej odpowiedź prowadzi do pojęcia pseudowypukłości i przestrzeni Steina. Choć brzmią one technicznie, w istocie wyznaczają jedną z najważniejszych granic nowoczesnej analizy zespolonej:

linię między obszarem, w którym funkcje holomorficzne mają pełną siłę organizującą, a obszarem, gdzie struktura zespolona istnieje, lecz nie poddaje się takiemu rygorowi.

Pseudowypukłość wyrasta z klasycznego problemu Leviego. Pytał on, czy każda domena pseudowypukła jest domeną holomorficzności – czyli czy warunek geometryczno-analityczny na brzegu domeny rzeczywiście gwarantuje istnienie funkcji holomorficznych, których nie da się przedłużyć poza ten brzeg. W materiale źródłowym intuicja ta zapisana jest wprost: domena holomorficzności to obszar w $\mathbb{C}^n$, dla którego istnieje funkcja holomorficzna niemogąca zostać analitycznie przedłużona poza jego brzeg, a problem Leviego dotyczył równoważności pseudowypukłości i bycia domeną holomorficzności. W literaturze kwestia ta bywa ujmowana jako pytanie o odwrotność: czy domena o pseudowypukłym brzegu musi być domeną holomorficzności; klasyczne omówienie Yum-Tong Siu podkreśla, że to właśnie „odwrotne" twierdzenie stanowiło właściwą trudność problemu. W jednej zmiennej zespolonej granice domen zachowują się stosunkowo przejrzyście, jednak w wielu zmiennych sytuacja zmienia się dramatycznie.

Pseudowypukłość i rygor przestrzeni Steina

Funkcje holomorficzne stają się sztywniejsze, zjawiska przedłużania analitycznego bardziej nieintuicyjne, a geometria brzegu zaczyna odgrywać rolę decydującą. To tutaj pojawia się pseudowypukłość jako właściwy odpowiednik wypukłości dla analizy zespolonej wielu zmiennych. Zwykła wypukłość geometryczna jest zbyt prosta, zbyt realna i zbyt przywiązana do linii prostych. Pseudowypukłość nie pyta o odcinki, lecz o zachowanie funkcji plurisubharmonicznych i formy Leviego; to wypukłość widziana nie oczami geometrii euklidesowej, lecz przez pryzmat funkcji holomorficznych.

Podstawowym narzędziem są funkcje plurisubharmoniczne. Funkcja półciągła z góry na rozmaitości zespolonej jest plurisubharmoniczna, jeżeli po obcięciu do każdej krzywej holomorficznej staje się funkcją subharmoniczną. W przypadku funkcji gładkich klasy C^2 warunek ten jest równoważny nieujemności zespolonego hesjanu; gdy wartości własne tego hesjanu są ściśle dodatnie, mówimy o funkcji ściśle plurisubharmonicznej, co odpowiada dodatniej określoności formy Leviego $i□ar{\partial}\partial\phi$. W praktyce oznacza to, że funkcja plurisubharmoniczna jest potencjałem zachowującym się wypukle w każdym zespolonym kierunku. Nie bada ona więc jedynie realnej geometrii przestrzeni, lecz jej zespolone przekroje.

Ściśle plurisubharmoniczna funkcja definiująca pozwala opisać rozmaitość silnie pseudowypukłą. Jest to zwarta rozmaitość zespolona z gładkim brzegiem, dla której istnieje kołnierzowe otoczenie

brzegu i ściśle plurisubharmoniczna funkcja bez punktów krytycznych, przyjmująca wartość zero na brzegu i wartości ujemne we wnętrzu. Ten opis ma bardzo konkretną geometrię: brzeg nie jest tu przypadkową granicą topologiczną, lecz poziomicą funkcji, która w zespolonych kierunkach zachowuje się jak wypukły potencjał. Wypukłość zostaje więc zapisana w analizie, a analiza zaczyna determinować geometrię.

Tutaj pojawiają się przestrzenie Steina, jedne z najważniejszych obiektów analizy zespolonej. Ich definicję poprzedza pojęcie holomorficznej wypukłości: rozmaitość jest holomorficznie wypukła, jeżeli dla każdego zwartego podzbioru jego holomorficznie wypukła powłoka również pozostaje zwarta. Rozmaitość Steina to z kolei holomorficznie wypukła rozmaitość zespolona, na której funkcje holomorficzne rozdzielają punkty i dostarczają lokalnych układów współrzędnych. Mówiąc obrazowo: przestrzeń Steina jest taka, że globalne funkcje holomorficzne nie są w niej rzadkim luksusem. Są administracją centralną geometrii. Rozpoznają punkty, tworzą współrzędne, kontrolują zwartość i umożliwiają zanurzenia.

W klasycznej teorii kluczowe są dwa twierdzenia: Remmerta-Bishopa-Narasimhana oraz Grauerta. Pierwsze z nich mówi, że każdą rozmaitość Steina wymiaru zespolonego n można zanurzyć jako domkniętą podrozmaitość zespoloną w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{C}^{2n+1}$. Współczesne ujęcia tej teorii potwierdzają, że rozmaitości Steina są dokładnie domkniętymi podrozmaitościami zespolonymi przestrzeni $\mathbb{C}^N$. Drugie twierdzenie, sformułowane przez Grauerta, definiuje rozmaitości Steina poprzez istnienie wyczerpującej ściśle plurisubharmonicznej funkcji. Rozmaitość zespolona jest zatem rozmaitością Steina wtedy i tylko wtedy, gdy dopuszcza taką funkcję (w wersji klasy C^2, co później Narasimhan osłabił w kwestii regularności). Znaczenie tego wyniku jest ogromne, gdyż łączy trzy porządki: globalną teorię funkcji holomorficznych, geometrię potencjału i topologię wyczerpywania. Funkcja wyczerpująca to taka, której podpoziomice są zwarte i która dąży do nieskończoności wraz z ucieczką w nieskończoność rozmaitości.

Dyscyplina Steina i brzegowa natura pseudowypukłości

Jeśli funkcja jest dodatkowo ściśle plurisubharmoniczna, przestrzeń zyskuje globalny potencjał wypukłości w sensie zespolonym. Wówczas rozmaitość nie tylko lokalnie przypomina obiekt zespolony, ale pozwala się globalnie porządkować za pomocą funkcji. To właśnie sedno dyscypliny Steina: lokalna analityczność to za mało; niezbędna jest globalna kontrola. Wyjaśnia ona, dlaczego rozmaitości Steina stanowią najważniejsze przykłady obiektów silnie pseudowypukłych. Silna pseudowypukłość brzegu jest w istocie lokalnym i brzegowym odpowiednikiem filozofii Steina –

funkcja plurisubharmoniczna narzuca przestrzeni strukturę zgodną z logiką funkcji holomorficznych. Jeżeli rozmaitość Steina jest państwem prawa funkcji holomorficznych, to silnie pseudowypukły brzeg stanowi jego konstytucyjną granicę. Nie każda granica jest jednak granicą państwa prawa i nie każdy brzeg jest brzegiem pseudowypukłym; tutaj forma granicy niesie konkretne konsekwencje analityczne.

Istnieje zasadnicza różnica między wypukłością holomorficzną a zwykłą. Ta druga sprowadza się do prostego warunku: jeśli dwa punkty leżą w zbiorze, to odcinek łączący je również musi się w nim znajdować. Wypukłość holomorficzna jest subtelniejsza – zakłada, że zwarte zbiory nie posiadają holomorficznych „cieni" uciekających w nieskończoność. Powłoka holomorficznie wypukła zbioru K to zbiór punktów, których nie da się oddzielić od K wartościami funkcji holomorficznych. Jeśli powłoka ta pozostaje zwarta, funkcje holomorficzne wykazują wystarczającą siłę separacyjną. Jest to zatem wypukłość nie względem linii, lecz względem testów holomorficznych. W matematyce rzetelne testy są ważniejsze niż deklaracje – zresztą poza nią również, choć rzadziej się do tego przyznajemy.

Pojęcie przestrzeni Steina należy rozszerzyć na przestrzenie z osobliwościami. O ile klasyczne rozmaitości Steina są gładkie, o tyle geometria analityczna wymaga uogólnienia ich na przestrzenie zespolone sklejane z podrozmaitości analitycznych, jak choćby zbiory zer wielomianów. One również muszą być holomorficznie wypukłe, a funkcje holomorficzne muszą w nich rozdzielać punkty. To przejście jest kluczowe, gdyż osobliwości nie są marginesem, lecz naturalnym składnikiem geometrii zespolonej. Jeśli teoria ma być kompletna, musi obejmować przestrzenie, które nie są gładkimi salonami. W tym miejscu pojawia się redukcja Remmerta.

Zgodnie z założeniami każdą rozmaitość silnie pseudowypukłą można odwzorować holomorficznie na przestrzeń Steina z co najwyżej skończoną liczbą normalnych osobliwości, przy czym odwzorowanie to jest biholomorfizmem poza punktami osobliwymi. Kierunek odwrotny również działa: rozmaitość uzyskana przez rezolucję osobliwości przestrzeni Steina staje się rozmaitością silnie pseudowypukłą. Wynik ten jest konceptualnie piękny, gdyż pozwala rozumieć silnie pseudowypukłe rozmaitości jako gładkie modele przestrzeni Steina z osobliwościami. Pseudowypukłość nie jest więc jedynie dodatkiem do teorii Steina, lecz jej brzegową i rozdzielczą wersją. Redukcja Remmerta działa tu jak procedura instytucjonalnej konsolidacji: pewne zwarte krzywe, stanowiące przeszkodę dla pełnej Steinowskiej separacji, zostają ściągnięte do osobliwości.

Rygor wypełnialności kontra elastyczność pseudowklęsłości

Poza tym obszarem przestrzeń pozostaje biholomorficznie taka sama. Geometria mówi nam tutaj jasno: problem nie znika, lecz zostaje skondensowany do punktu, który można nazwać osobliwością i poddać osobnej analizie. To bardzo dojrzałe podejście. Nie zamiata się komplikacji pod dywan. Zamienia się ją w obiekt.

Przykład włókna Milnora świetnie pokazuje splot teorii osobliwości, pseudowypukłości i przestrzeni Steina. Jeśli mamy wielomian zespolony z izolowaną osobliwością, możemy badać jego regularne poziomice w jej sąsiedztwie. Powstaje wówczas włókno Milnora, opisane w notatce jako rygorystyczny przykład gładkiej rozmaitości Steina. Brzeg tego włókna – splot osobliwości – posiada naturalną strukturę CR i kontaktową. Zapowiada to przejście do geometrii kontaktowej w wymiarze trzy: brzeg obiektu zespolonego nie jest martwą powierzchnią graniczną, lecz nosi dziedziczoną strukturę geometryczną.

Tutaj zaczyna się wielki kontrast, który będzie prowadził przez dalszą część artykułu. Silnie pseudowypukłe rozmaitości i przestrzenie Steina są restrykcyjne; ich brzegi nie mogą być dowolne. Wypełnialność holomorficzna czy Steinowska narzuca konkretne ograniczenia topologiczne i kontaktowe. W notatce źródłowej podkreślono to wyraźnie: z prac między innymi Bogomolova i de Oliveiry wiadomo, że rozmaitości dopuszczające zwykłe, wypukłe wypełnienia holomorficzne są niezwykle rygorystyczne, a wypełnialność holomorficzna w wymiarze trzecim jest de facto równoważna byciu brzegiem rozmaitości Steina. To nie jest drobna techniczna uwaga. To centralny punkt dramaturgii książki Kasuyi.

Pseudowypukłość i Steinowskość oznaczają bowiem, że brzeg znajduje się po stronie porządku. Można go postrzegać jako kontaktową granicę przestrzeni kontrolowanej przez funkcje holomorficzne od wewnątrz. Taki brzeg nie jest dowolną trójwymiarową rozmaitością kontaktową – musi spełniać warunki wynikające z istnienia wypełnienia. W geometrii kontaktowej mówi się o wypełnialności symplektycznej, Steinowskiej czy holomorficznej. Każda z tych własności jest rodzajem certyfikatu: potwierdzeniem, że dana struktura kontaktowa może być brzegiem świata o określonej regularności. Certyfikaty zaś mają to do siebie, że jednych dopuszczają, a innych odrzucają. Matematyka też zna kontrolę jakości, tylko nie musi przy tym drukować formularzy w trzech egzemplarzach.

Na tle tej restrykcyjności zaskakująca okaże się silna pseudowklęsłość. Aby ją jednak zrozumieć, trzeba najpierw dostrzec istotę odwrócenia znaku. W przypadku silnej pseudowypukłości

rozmaitość leży po stronie ujemnej funkcji definiującej, a brzeg jest poziomicą z dodatnią formą Leviego (w odpowiednim sensie). Przy pseudowklęsłości sytuacja zostaje odwrócona: rozmaitość leży „powyżej" poziomu zerowego, a brzeg indukuje ujemną strukturę kontaktową. Materiał źródłowy rozpoczyna się właśnie od tej definicji: rozmaitości silnie pseudowklęsłe to zwarte powierzchnie zespolone z gładkim brzegiem, dla których istnieje otoczenie kołnierzowe brzegu i ściśle plurisubharmoniczna funkcja definiująca, względem której rozmaitość leży powyżej poziomu zerowego wyznaczającego brzeg; zespolona styczność takiego brzegu indukuje ujemną strukturę kontaktową na odpowiadającej mu trójwymiarowej rozmaitości. To odwrócenie jest subtelne, ale jego konsekwencje są dramatyczne.

Elastyczność wypełnień wklęsłych i brzeg jako interfejs

Po stronie pseudowypukłej dominuje rygor Steina, natomiast po stronie pseudowklęsłej pojawia się elastyczność. Kasuya i Zuddas stawiają pytanie: jakie rozmaitości kontaktowe mogą być brzegami rozmaitości wklęsłych? Odpowiedź jest zaskakująco mocna: każda dodatnia, zamknięta trójwymiarowa rozmaitość kontaktowa dopuszcza nieskończenie wiele wklęsłych wypełnień holomorficznych. Pełne znaczenie tego twierdzenia stanie się jednak jasne dopiero po wejściu w geometrię kontaktową.

Można już uchwycić główną linię argumentu. Pseudowypukłość i przestrzenie Steina pokazują, jak funkcje holomorficzne budują porządek. Pseudowklęsłość z kolei ujawnia, że odwrócenie orientacji brzegu otwiera niespodziewaną przestrzeń swobody. Nie chodzi tu o prostą symetrię; świat wypukły i wklęsły nie są lustrzanymi bliźniętami. Są raczej dwoma ustrojami geometrii. Pierwszy z nich mówi: aby być brzegiem, musisz spełnić wysokie wymagania regularności.

Drugi odpowiada: każdy dodatni kontaktowy świat trójwymiarowy może zostać zrealizowany jako brzeg wklęsłego wypełnienia holomorficznego – i to na nieskończenie wiele sposobów. Ta różnica ma sens głębszy niż czysto techniczny. W geometrii zespolonej brzeg nie jest końcem przestrzeni, lecz miejscem transmisji struktury. Z wnętrza na brzeg przechodzi dystrybucja kontaktowa, orientacja, dodatniość lub ujemność oraz pamięć funkcji definiującej. Brzeg staje się zatem interfejsem między analizą zespoloną a topologią trójwymiarową. Właśnie dlatego geometria kontaktowa nie jest jedynie dodatkiem do teorii pseudowypukłości i pseudowklęsłości, lecz jej naturalnym językiem granicznym.

Tam, gdzie kończy się rozmaitość zespolona, zaczyna się kontaktowa opowieść brzegu. Należy zatem zgłębić geometrię kontaktową wymiaru trzeciego: formy kontaktowe, pole Reeba, twierdzenie Darboux, stabilność Graya, węzły Legendre'a i transwersalne, rozkłady na otwarte

księgi, struktury napięte i przekręcone oraz teorię powierzchni wypukłych. Dopiero ten aparat pozwoli zrozumieć, dlaczego chirurgia kontaktowa Dehna i holomorficzne doklejanie rączki w konstrukcji Kasuyi i Zuddasa są tak potężne. Cała magia – jeśli wolno tak powiedzieć w matematyce bez ryzyka konfiskaty kredy – polega na tym, że manipulując brzegiem kontaktowym, można budować wnętrza holomorficzne.

Po stronie przestrzeni Steina i silnej pseudowypukłości widzieliśmy dyscyplinę funkcji holomorficznych. Funkcja plurisubharmoniczna porządkowała wnętrze, brzeg stawał się poziomicą, a geometria zespolona przechodziła w strukturę kontaktową. Teraz trzeba zatrzymać się właśnie na tym brzegu. Nie jest on bierną skórą rozmaitości, nie jest opakowaniem po geometrii, które można wyrzucić po otwarciu pudełka. Brzeg jest miejscem transmisji.

To tutaj analiza wielu zmiennych zespolonych przeobraża się w trójwymiarową geometrię kontaktową, a pytanie o wnętrze holomorficzne staje się pytaniem o to, jakie pole płaszczyzn można zrealizować na trójwymiarowej rozmaitości. Geometria kontaktowa w wymiarze trzecim bada maksymalnie niecałkowalne pola płaszczyzn. Formalnie struktura kontaktowa na trójwymiarowej rozmaitości jest polem dwuwymiarowych płaszczyzn, które lokalnie można zapisać jako jądro jedynkowej formy α, spełniającej warunek $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$.

Geometria kontaktowa jako dynamika permanentnego skręcenia

Ten warunek wygląda niewinnie, ale jego znaczenie jest zasadnicze. Mówi on, że pole płaszczyzn nie skleja się w rodzinę powierzchni – nie jest całkowalne. Nie można go rozumieć jako rozkładu stycznego do jakiegoś gładkiego układu warstw. Struktura kontaktowa jest więc geometrią permanentnego skręcenia. Nie tyle zakazuje ruchu, ile uniemożliwia spokojne położenie się przestrzeni w płaskich kartkach. To odróżnia ją od blisko spokrewnionej geometrii symplektycznej. Forma symplektyczna występuje w wymiarach parzystych i jest zamkniętą, niezdegenerowaną dwuformą; struktura kontaktowa natomiast dominuje w wymiarach nieparzystych, często pojawiając się jako naturalna cecha hiperpowierzchni typu poziomicy w rozmaitości symplektycznej lub zespolonej. Można rzec, że geometria kontaktowa jest geometrią granicy świata symplektycznego. Tam, gdzie przestrzeń parzystowymiarowa kończy się brzegiem, zostawia po sobie nieparzystowymiarowy ślad kontaktowy. Brzeg nie jest więc końcem zdania. Jest przejściem do innej gramatyki.

Z formą kontaktową związane jest pole wektorowe Reeba, jednoznacznie wyznaczone i z nią powiązane. Pole Reeba to kierunek szczególny: uzupełnia płaszczyzny kontaktowe, wyznacza dynamikę przepływu i staje się głównym aktorem w badaniach orbit okresowych, dynamiki Hamiltonowskiej oraz wypełnialności. Jeśli płaszczyzny kontaktowe tworzą skręcone pole ograniczeń, to pole Reeba jest ruchem, który przez te ograniczenia przechodzi bokiem. Geometria kontaktowa nie jest zatem statycznym układem płaszczyzn, lecz syntezą płaszczyzn i dynamiki. Jednym z pierwszych kluczowych wyników tej teorii jest twierdzenie Darboux. Mówi ono, że w geometrii kontaktowej nie istnieją lokalne niezmienniki: każda trójwymiarowa struktura kontaktowa lokalnie wygląda tak samo, będąc kontaktomorficzną ze standardową strukturą na R3.

To twierdzenie jest jednocześnie uspokajające i przewrotne. Uspokaja, bo lokalnie wszystko pozostaje standardowe. Jest przewrotne, gdyż przenosi całą powagę teorii na poziom globalny. Jeżeli lokalnie nie ma różnic, muszą one ukrywać się w sposobie globalnego sklejenia – w topologii, węzłach, chirurgiach, otwartych księgach oraz w napiętości i przekręceniu. Lokalność, zwykle tak istotna w analizie, okazuje się tutaj zbyt uboga, by odróżniać światy. Drugim podstawowym wynikiem jest twierdzenie Graya o stabilności.

Zgodnie z nim gładka deformacja struktur kontaktowych na zwartej rozmaitości może zostać zrealizowana przez dyfeomorfizmy otaczającej przestrzeni. Oznacza to, że zwarta geometria kontaktowa jest stabilna wobec homotopii w silnym sensie: jeśli struktury zmieniają się gładko, nie powstaje zasadniczo nowy typ kontaktowy, lecz zmiana może zostać „wchłonięta” przez przekształcenie rozmaitości. W ten sposób teoria kontaktowa raz jeszcze potwierdza swoją globalną naturę.

Dychotomia napiętości i przekręcenia w strukturach kontaktowych

Nie każda deformacja jest wydarzeniem, a nie każda zmiana formy oznacza zmianę typu. Czasem matematyka mówi coś, co warto byłoby powiesić w urzędach i redakcjach: ruch nie zawsze oznacza postęp. Najważniejsze napięcie w trójwymiarowej geometrii kontaktowej rozgrywa się między strukturami napiętymi a przekręconymi. Punktem wyjścia jest definicja dysku przekręconego: to dysk ograniczony węzłem Legendre'a o liczbie Thurstona-Bennequina równej zero, z charakterystycznym zachowaniem płaszczyzn kontaktowych w jego wnętrzu. Struktura kontaktowa uznawana jest za napiętą, jeśli nie zawiera żadnego takiego dysku; jest przekręcona, jeśli posiada przynajmniej jeden.

Ten podział jest jednym z najbardziej dramatycznych w całej teorii. Napiętość oznacza globalną dyscyplinę, podczas gdy przekręcenie niesie ze sobą elastyczność tak dużą, że klasyfikacja staje się zasadniczo topologiczna. Eliashberg całkowicie sklasyfikował struktury przekręcone, wykazując, że problem sprowadza się do topologicznej homotopii pól płaszczyzn. Oznacza to, że po stronie przekręconej geometria traci część swojej sztywności. Struktury te są elastyczne: ich klasyfikacja zależy od danych topologicznych, a nie od subtelniejszych ograniczeń analitycznych. Można je wytwarzać między innymi poprzez skręcenie Lutza wzdłuż węzła transwersalnego, co modyfikuje strukturę kontaktową tak, by stała się przekręcona.

Struktury napięte są inne. Nie dają się tak łatwo sklasyfikować; cechują się większą sztywnością i ściślejszym związkiem z wypełnialnością Steinowską oraz symplektyczną. Ważnym przykładem struktury napiętej jest standardowa struktura kontaktowa na sferze S3. Można zatem stwierdzić, że w geometrii kontaktowej – podobnie jak w geometrii zespolonej – istnieją dwa porządki: porządek rygoru i porządek elastyczności. Nie pokrywają się one naiwnie z podziałem na „dobre” i „złe”. Struktury przekręcone nie są błędem; to obszar, w którym teoria ujawnia h-principle oraz topologiczną naturę kontaktowości. Struktury napięte nie są po prostu lepsze – są trudniejsze, bardziej restrykcyjne i często bliższe światu wypełnień.

Do badania tych struktur geometria kontaktowa wykorzystuje teorię węzłów, wyróżniając dwa typy: węzły Legendre'a oraz węzły transwersalne. Węzeł Legendre'a to krzywa zamknięta, która w każdym punkcie jest styczna do płaszczyzny kontaktowej. Jest to obiekt całkowicie zanurzony w dystrybucji kontaktowej, idący zgodnie z jej płaszczyznami, jak gdyby próbował poruszać się wewnątrz samego systemu ograniczeń. Jego podstawowym niezmiennikiem jest liczba Thurstona-Bennequina, określająca splecenie węzła z jego przesunięciem w kierunku normalnym do płaszczyzny kontaktowej. Węzeł transwersalny reprezentuje przeciwstawne zachowanie: w każdym punkcie przecina lokalną płaszczyznę kontaktową transwersalnie. Nie podąża wewnątrz ograniczenia, lecz przechodzi przez nie. Ten kontrast okaże się kluczowy w konstrukcji Kasuyi i Zuddasa.

W klasycznej konstrukcji rozmaitości Steina Eliashberga, poprzez doklejanie rączek, wypukłą rączkę mocuje się wzdłuż węzła Legendre'a, a rdzeniem rączki jest całkowicie rzeczywisty dysk. U Kasuyi i Zuddasa natomiast, w przypadku wklęsłej rączki holomorficznej, doklejanie następuje wzdłuż węzła transwersalnego, a rdzeniem staje się dysk holomorficzny. Ta różnica nie jest kosmetyczna – to fundamentalna zmiana filozofii konstrukcji.

Elastyczność struktur kontaktowych i uniwersalność wypełnień wklęsłych

Węzły kontaktowe umożliwiają przeprowadzanie chirurgii – operacji wycinania i wklejania, które zmieniają topologię rozmaitości oraz jej strukturę kontaktową. Kontaktowa chirurgia Dehna polega na modyfikacji przestrzeni poprzez usunięcie pełnego torusa $S^1 \times D^2$ z otoczenia rurkowatego węzła i wklejenie go ponownie przy zachowaniu odpowiedniej geometrii kontaktowej. Operację tę wykonuje się wzdłuż węzłów Legendre'a, gdyż ich otoczenia posiadają naturalne ramki kontaktowe, pozwalające kontrolować nowo wstawiany torus. Kluczowe znaczenie ma tu twierdzenie Dinga i Geigesa: dowolne dwie dodatnie, spójne trójwymiarowe rozmaitości kontaktowe można połączyć skończonym ciągiem chirurgii kontaktowych (± 1). Ten wynik świadczy o ogromnej elastyczności operacyjnej; pokazuje, że chirurgia kontaktowa nie jest jedynie lokalną sztuczką, lecz pełnoprawnym językiem przejść między strukturami kontaktowymi. Jeśli potrafimy zrealizować odpowiednie chirurgie za pomocą operacji holomorficznych na wklęsłych brzegach, możemy konstruować wypełnienia dla bardzo szerokiej klasy rozmaitości kontaktowych.

Właśnie to podejście wykorzystują Kasuya i Zuddas. Zanim jednak przejdziemy do ich twierdzenia, należy przywołać rozkłady na otwarte księgi. Rozkład ten opisuje trójwymiarową rozmaitość jako sumę jednowymiarowego splotu (grzbietu) oraz rodziny dwuwymiarowych powierzchni (kartek), rozwłóknionych nad okręgiem. Obraz jest niemal literacki: przestrzeń przypomina książkę, której grzbiet pozostaje nieruchomy, a kartki obracają się wokół niego. Nie jest to jednak metafora ozdobna, lecz precyzyjne narzędzie topologiczne. Korespondencja Girouxa ustanawia bowiem związek między strukturami kontaktowymi (z dokładnością do izotopii) a rozkładami na otwarte księgi (z dokładnością do dodatniej stabilizacji). Jest to jeden z tych wyników, które zmieniają perspektywę całej dziedziny: struktura kontaktowa, czyli pole płaszczyzn, zostaje powiązana z dekompozycją topologiczną rozmaitości. To tak, jakby napięcie wewnętrzne książki można było odczytać z samego układu jej kartek.

Dzięki temu wiele problemów kontaktowych można przełożyć na język monodromii, stabilizacji i teorii powierzchni. Ponownie pojawia się motyw rozwłóknień: rozumienie przestrzeni poprzez sposób, w jaki układa się ona w rodziny obiektów o niższym wymiarze. Kolejnym narzędziem jest teoria powierzchni wypukłych Girouxa. Powierzchnia wypukła w przestrzeni kontaktowej to zamknięta gładka powierzchnia posiadająca poprzeczne kontaktowe pole wektorowe. Płaszczyzny kontaktowe wyznaczają na niej foliację charakterystyczną, a z samą powierzchnią związany jest zbiór dzielący – układ nieprzecinających się krzywych zamkniętych oddzielających strefy dodatnią i ujemną. Najważniejszy rezultat tej teorii wskazuje, że krzywe zbioru dzielącego determinują

strukturę kontaktową w otoczeniu powierzchni wypukłej, a kryterium Girouxa pozwala badać napiętość struktury poprzez analizę topologii tego zbioru.

To kolejna lekcja o granicach. Powierzchnia zanurzona w trójwymiarowej rozmaitości kontaktowej staje się nośnikiem informacji o swoim otoczeniu. Zbiór dzielący działa jak mapa napięć: oddziela regiony, koduje strukturę kontaktową i pozwala rozpoznać, czy lokalne zachowania prowadzą do globalnej napiętości, czy do przekręcenia. W teorii kontaktowej wiele kwestii rozstrzyga się nie poprzez pomiar odległości, lecz przez analizę układu krzywych. Geometria zamienia się w semiotykę skręcenia.

W tym punkcie można wrócić do brzegów pseudowypukłych i pseudowklęsłych. Jeśli X jest rozmaitością zespoloną z gładkim brzegiem, to zespolone styczności brzegu tworzą naturalną strukturę kontaktową, o ile brzeg jest silnie pseudowypukły lub silnie pseudowklęsły. W przypadku silnej pseudowypukłości otrzymujemy dodatnią strukturę kontaktową zgodną z orientacją brzegu. Przy silnej pseudowklęsłości pojawia się struktura ujemna (brzeg kontaktomorficzny z $(-M,\xi)$, gdzie (M,ξ) jest dodatnią, zwartą trójwymiarową rozmaitością kontaktową). Wklęsłe wypełnienie holomorficzne jest zatem silnie pseudowklęsłą powierzchnią, której brzeg odpowiada danej strukturze kontaktowej z odwróconą orientacją. Tu ujawnia się zasadniczy kontrast z klasyczną teorią wypełnień wypukłych: wypełnienia wypukłe, Steinowskie lub holomorficzne są restrykcyjne – nie każda struktura kontaktowa może być ich brzegiem.

Tymczasem główny wynik Kasuyi i Zuddasa mówi, że każda dodatnia, zamknięta trójwymiarowa rozmaitość kontaktowa dopuszcza nieskończenie wiele wklęsłych wypełnień holomorficznych. To niezwykle mocne twierdzenie o elastyczności. W świecie pseudowklęsłym nie istnieją analogiczne bariery topologiczne czy geometryczne, które ograniczają wypełnienia pseudowypukłe. Dlaczego tak się dzieje?

Pseudowklęsłość jako uniwersalny mechanizm realizowalności

Notatka wskazuje konkretny mechanizm: holomorficzne doklejanie dwurączki do silnie pseudowklęsłego brzegu. Konstrukcja ta jest koncepcyjnie pokrewna metodzie Eliashberga dla rozmaitości Steina, lecz różni się w punkcie krytycznym. U Eliashberga wypukłą rączkę z całkowicie rzeczywistym dyskiem jako rdzeniem dokleja się wzdłuż węzła Legendre'a. W przypadku Kasuyi i Zuddasa wklęsła rączka holomorficzna posiada rdzeń będący dyskiem holomorficznym, a samo doklejanie następuje wzdłuż węzła transwersalnego. To odwrócenie rodzaju węzła i rdzenia

odpowiada zmianie natury brzegu: wypukłość wiąże się z węzłem Legendre'a i całkowicie rzeczywistym rdzeniem, podczas gdy wklęsłość operuje na transwersalności i rdzeniu holomorficznym. Wykorzystanie węzła transwersalnego pozwala naturalnie realizować obie kontaktowe chirurgie Dehna – zarówno (+1), jak i (−1) – na strukturze kontaktowej brzegu. Skoro Ding i Geiges wykazali, że dowolne dwie dodatnie rozmaitości kontaktowe można połączyć ciągiem takich chirurgii, Kasuya i Zuddas mogą wyjść od przestrzeni modelowej i poprzez odpowiednią sekwencję operacji uzyskać wklęsłe wypełnienie dla każdej zadanej przestrzeni kontaktowej.

Konstrukcja ta cechuje się niezwykłą elegancją: twierdzenie klasyfikacyjno-operacyjne z geometrii kontaktowej zostaje podniesione do poziomu konstrukcji holomorficznej po stronie pseudowklęsłej. Można to ująć następująco: chirurgia kontaktowa dostarcza alfabetu możliwych przekształceń brzegu, a holomorficzna wklęsła rączka Kasuyi i Zuddasa wskazuje sposób, by każde z tych przekształceń zrealizować poprzez operację na wnętrzu zespolonym. Brzeg kontaktowy i wnętrze holomorficzne zaczynają mówić wspólnym językiem. Nie jest to jednak język rygoru Steina, lecz język elastycznej realizowalności. Matematycznie jest to różnica między światem, w którym tylko wybrane struktury mogą być brzegami wypukłych wypełnień, a światem, w którym każda dodatnia struktura kontaktowa może stanowić brzeg wklęsłego wypełnienia holomorficznego.

Wynik ten ma znaczenie nie tylko techniczne, ale i koncepcyjne. Dowodzi, że pseudowklęsłość nie jest prostym negatywem pseudowypukłości ani tym samym obrazem z odwróconym znakiem. W geometrii zmiana znaku często fundamentalnie zmienia naturę problemu. Podobnie jak w analizie przejście od eliptyczności do hiperboliczności nie jest drobną korektą, lecz zmianą paradygmatu, tak tutaj odwrócenie kierunku wypukłości otwiera przestrzeń zupełnie innej elastyczności. Pseudowypukłość jest selektywna, pseudowklęsłość - w tym zakresie - uniwersalizująca. Nie oznacza to jednak, że wszystko staje się banalne. Istnienie nieskończenie wielu wypełnień holomorficznych dla tej samej struktury kontaktowej świadczy o bogactwie konstrukcji, a nie o braku struktury. Elastyczność nie jest chaosem; jest kontrolowaną możliwością realizacji. Różnica jest zasadnicza: chaos mówi, że wszystko jest jedno, elastyczność zaś, że można wiele, lecz według określonych operacji. Właśnie dlatego twierdzenie Kasuyi i Zuddasa jest tak silne. Nie stwierdza ono mgliście, że pseudowklęsłość „daje większą swobodę", lecz wskazuje konkretny mechanizm: doklejanie rączki, węzły transwersalne, kontaktowe chirurgie (±1), twierdzenie Dinga-Geigesa i konstrukcję wypełnień.

Dzięki temu można lepiej zrozumieć rolę geometrii kontaktowej w całej książce. Nie jest ona osobnym rozdziałem dla urozmaicenia, lecz koniecznym językiem brzegu.

Silna pseudowklęsłość jako obszar uniwersalnej realizowalności wypełnień

Powierzchnie niekählerowskie pokazały, że struktury zespolone mogą istnieć poza kählerowskim porządkiem. Rozwłóknienia Lefschetza udowodniły z kolei, że topologia czterowymiarowa i degeneracje włókien stanowią solidny szkielet konstrukcyjny, a pseudowypukłość i przestrzenie Steina obnażyły rygor funkcji holomorficznych.

Geometria kontaktowa pokazuje natomiast, co dzieje się na granicy: jak brzeg przechowuje strukturę i w jaki sposób można nim operować. Czas przejść bezpośrednio do rozmaitości silnie pseudowklęsłych i wklęsłych wypełnień holomorficznych. To tutaj przeanalizujemy, dlaczego twierdzenie o istnieniu nieskończenie wielu wypełnień dla każdej dodatniej zwartej trójwymiarowej rozmaitości kontaktowej jest wynikiem tak przełomowym, jaką rolę odgrywa konstrukcja rączki holomorficznej i dlaczego problem wklęsłych wypełnień Kählera pozostaje subtelny. Kasuya nie kończy bowiem na samej elastyczności holomorficznej; pyta również, kiedy może ona współistnieć z kählerowskim rygorem. To pytanie jest jak zaproszenie do pojedynku między wolnością konstrukcji a dyscypliną formy zamkniętej.

Silna pseudowklęsłość i wypełnienia holomorficzne to w istocie elastyczność widziana po odwróconej stronie brzegu. Po stronie pseudowypukłości dominował rygor: rozmaitość Steina, funkcja wyczerpująca, ściśle plurisubharmoniczny potencjał, holomorficzna wypukłość i separacja punktów przez funkcje globalne tworzyły obraz przestrzeni ściśle zarządzanej przez analizę zespoloną. Brzeg takiej przestrzeni jest dodatnią rozmaitością kontaktową, lecz nie dowolną – musi spełniać warunki wynikające z istnienia wnętrza o silnej strukturze holomorficznej. Wypełnialność Steinowska czy silnie pseudowypukła jest więc rodzajem certyfikatu jakości.

Nie każdy brzeg go otrzymuje. Matematyka bywa tu mniej demokratyczna niż regulamin konkursu grantowego, ale przynajmniej uzasadnia swoje decyzje. Silna pseudowklęsłość odwraca tę perspektywę – nie przez prostą negację, lecz poprzez zmianę kierunku relacji między funkcją definiującą, wnętrzem a brzegiem. Rozmaitości silnie pseudowklęsłe opisuje się jako zwarte powierzchnie zespolone z gładkim brzegiem, dla których istnieje odpowiednie kołnierzowe otoczenie brzegu i ściśle plurisubharmoniczna funkcja definiująca, przy czym rozmaitość leży „powyżej” poziomu zerowego wyznaczającego brzeg. Zespolona styczność tak zdefiniowanego brzegu indukuje ujemną strukturę kontaktową na odpowiadającej mu trójwymiarowej rozmaitości.

Tym krótkim sformułowaniem dokonuje się zasadnicza zmiana geometrii. W przypadku pseudowypukłym rozmaitość leży po stronie kontrolowanej przez „wnętrze” funkcji

plurisubharmonicznej. W wariancie pseudowklęsłym sytuacja zostaje odwrócona: ta sama analityczna dodatniość funkcji w kierunkach zespolonych opisuje brzeg, lecz przestrzeń znajduje się po drugiej stronie poziomicy. To tak, jakbyśmy mieli tę samą granicę prawną, ale zmienili stronę, z której ją interpretujemy – przepisy pozostają te same, lecz skutki ustrojowe są zupełnie inne. W matematyce orientacja nie jest dekoracją; jej zmiana potrafi odmienić całą teorię.

Kasuya wprowadza pojęcie wklęsłego wypełnienia holomorficznego jako silnie pseudowklęsłą powierzchnię, której brzeg jest kontaktomorficzny z $(-M,\xi)$, gdzie (M,ξ) oznacza dodatnią, zwartą trójwymiarową rozmaitość kontaktową. Zapis z minusem przed M jest kluczowy: chodzi o odwrócenie orientacji brzegu. Z punktu widzenia teorii kontaktowej mamy dodatnią rozmaitość (M,ξ), ale jako brzeg obiektu pseudowklęsłego pojawia się ona z orientacją przeciwną. Wypełnienie wklęsłe nie jest więc wypełnieniem w tym samym sensie co wypukłe; to raczej holomorficzny świat dołączony po drugiej stronie kontaktowej granicy.

Najważniejszy wynik Kasuyi i Zuddasa mówi, że każda dodatnia, zamknięta trójwymiarowa rozmaitość kontaktowa dopuszcza nieskończenie wiele wklęsłych wypełnień holomorficznych. Twierdzenie to uderza w intuicję wyniesioną ze świata pseudowypukłego, gdzie wypełnialność była ograniczona i nacechowana sztywnością. Tutaj okazuje się ona powszechna.

Nie istnieją analogiczne przeszkody topologiczne ani geometryczne, by zrealizować dowolną dodatnią strukturę kontaktową jako brzeg silnie pseudowklęsłej powierzchni. Nie jest to jednak „wolność przez brak reguł”. Twierdzenie nie sugeruje, że wszystko jest możliwe dlatego, iż niczego nie kontrolujemy; wskazuje raczej na konkretny mechanizm konstrukcyjny, który realizuje dowolną strukturę kontaktową poprzez skończony ciąg operacji. Jest nim holomorficzne doklejanie dwurączki do silnie pseudowklęsłego brzegu.

Kasuya i Zuddas budują metodę analogiczną do konstrukcji rączek Eliashberga w teorii rozmaitości Steina, wprowadzając jednak jedną fundamentalną zmianę. U Eliashberga wypukłą rączkę, której rdzeniem jest całkowicie rzeczywisty dysk, dokleja się wzdłuż węzła Legendre'a. U Kasuyi i Zuddasa wklęsła rączka holomorficzna ma rdzeń będący dyskiem holomorficznym, a doklejanie następuje wzdłuż węzła transwersalnego. To rozróżnienie jest jedną z najważniejszych miniatur całej książki: po stronie wypukłej rdzeń jest całkowicie rzeczywisty (nie zawiera zespolonych kierunków stycznych i zachowuje separację względem struktury zespolonej), a doklejanie odbywa się wzdłuż węzła Legendre'a, całkowicie stycznego do płaszczyzn kontaktowych. Po stronie wklęsłej rdzeń jest holomorficzny (zgodny ze strukturą zespoloną), a doklejanie następuje wzdłuż węzła transwersalnego, przecinającego płaszczyzny kontaktowe.

Zmienia się zatem nie tylko technika, ale cała geometria relacji między brzegiem, rdzeniem a strukturą zespoloną. Dzięki wykorzystaniu transwersalnego okręgu doklejającego operacja Kasuyi i Zuddasa naturalnie realizuje obie kontaktowe chirurgie Dehna – zarówno (+1), jak i (−1) – na brzegowej strukturze kontaktowej. To jest punkt krytyczny dowodu.

Chirurgie Dehna jako droga do dowolnego brzegu

Kontaktowe chirurgie Dehna umożliwiają przekształcanie jednych struktur kontaktowych w inne. Jeśli holomorficzne doklejanie wklęsłej rączki pozwala zrealizować obie te chirurgie, a twierdzenie Dinga i Geigesa dowodzi, że dowolne dwie dodatnie rozmaitości kontaktowe można połączyć odpowiednim ciągiem chirurgii (±1), to otrzymujemy konstrukcyjną drogę do dowolnego brzegu kontaktowego.

Proceduralna konstrukcja i elastyczność wypełnień wklęsłych

Proces ten można prześledzić krok po kroku. Zaczynamy od modelowej przestrzeni o znanym wklęsłym wypełnieniu, a następnie wybieramy dowolną dodatnią trójwymiarową rozmaitość kontaktową, którą chcemy uzyskać jako brzeg. Twierdzenie Dinga-Geigesa gwarantuje, że przejście od brzegu modelowego do zadanego jest możliwe poprzez skończony ciąg chirurgii kontaktowych (+1) i (−1). Kasuya i Zuddas wykazują natomiast, że każdą z tych operacji można zrealizować przez doklejenie odpowiedniej holomorficznej wklęsłej rączki. W efekcie całego ciągu działań otrzymujemy powierzchnię silnie pseudowklęsłą o żądanym brzegu.

Twierdzenie to nie jest więc abstrakcyjnym istnieniem wyciągniętym z mgły, lecz konkretną procedurą. Ta proceduralność ma głębokie znaczenie epistemiczne: matematyka przekonuje najsilniej wtedy, gdy nie tylko stwierdza istnienie obiektu, ale pokazuje sposób jego budowy. Konstrukcja rączkowa staje się tutaj odpowiednikiem warsztatu. Nie oglądamy gotowego eksponatu za muzealną szybą; widzimy narzędzia, sekwencję działań, miejsca sklejenia, typy węzłów i ich bezpośredni wpływ na brzeg. Jest to kluczowe, gdyż geometria kontaktowa wykazuje ogromną wrażliwość na operacje lokalne – niewielkie doklejenie może zmienić globalny typ kontaktowy. Chirurgia nie jest tu zwykłym łataniem dziury; jest zmianą konstytucji brzegu.

Kontrast z konstrukcjami Steinowskimi Eliashberga pozostaje stale obecny. W świecie Steina doklejanie rączek podlega ścisłym ograniczeniom indeksowym i kontaktowym. Rozmaitości Steina

opisuje się poprzez handlebody decomposition, gdzie rączki dodawane są zgodnie z warunkami pozwalającymi zachować ściśle plurisubharmoniczną funkcję Morse'a. W wymiarze zespolonym dwa szczególną rolę odgrywa doklejanie dwurączek wzdłuż węzłów Legendre'a z odpowiednim framowaniem – to swoista algebra dyscypliny.

U Kasuyi i Zuddasa rączka operuje po stronie wklęsłej, co zmienia nie tylko orientację brzegu, ale i cały zestaw dopuszczalnych operacji. To właśnie z tego odwrócenia rodzi się elastyczność pseudowklęsłości. Nie należy jej jednak mylić z dowolnością zespoloną. Wklęsłe wypełnienie holomorficzne pozostaje powierzchnią zespoloną z gładkim brzegiem, wymagającą ściśle plurisubharmonicznej funkcji definiującej w kołnierzu i posiadającą precyzyjnie określoną strukturę kontaktową na brzegu. Nie jest to „rozluźnienie standardów" w znaczeniu potocznym, lecz inny system norm. Pseudowypukłość pyta: które brzegi mogą ograniczać przestrzeń kontrolowaną od wewnątrz przez funkcje holomorficzne? Pseudowklęsłość zaś pyta: jakie brzegi mogą pojawić się jako zewnętrzna, odwrócona granica silnie pseudowklęsłej powierzchni?

Odpowiedzi na te pytania są radykalnie różne. Ta rozbieżność pozwala zrozumieć, dlaczego Kasuya mówi o elastyczności brzegów silnie pseudowklęsłych. Elastyczność nie oznacza braku geometrii, lecz brak przeszkód klasyfikacyjnych znanych ze świata wypukłego. Każda dodatnia, zamknięta trójwymiarowa rozmaitość kontaktowa może zostać zrealizowana – i to na nieskończenie wiele sposobów. Ten drugi aspekt, nieskończoność wypełnień, jest równie istotny co powszechność istnienia. Nie chodzi bowiem o sam fakt, że brzeg „posiada jakieś" wypełnienie, lecz o to, że ten sam brzeg może być granicą wielu różnych wnętrz holomorficznych.

Tu pojawia się zagadnienie szczególnie subtelne: metryki Kählera na wypełnieniach wklęsłych. Materiał źródłowy wskazuje, że wklęsłe wypełnienia holomorficzne można konstruować zarówno jako kählerowskie, jak i nie-kählerowskie. To spostrzeżenie streszcza napięcie całej książki: z jednej strony mamy holomorficzną elastyczność wypełnień pseudowklęsłych, z drugiej zaś pytanie o możliwość pogodzenia tej elastyczności z dyscypliną kählerowskiej formy zamkniętej. Odpowiedź nie jest banalna – czasem jest to możliwe, a czasem nie. Kasuya i Zuddas dowodzą, że jeśli wyjściowa powierzchnia jest przestrzenią Kählera o silnie pseudowklęsłym brzegu, formę Kählera można gładko przedłużyć na nowo doklejoną wklęsłą rączkę holomorficzną, pod warunkiem, że obszar rączki leży odpowiednio blisko granicy. Wynik ten ma fundamentalne znaczenie techniczne.

Wklęsłe wypełnienia Kählera jako synteza elastyczności i rygoru

Analiza ta pokazuje, że sama operacja doklejania wklęsłej rączki nie musi niszczyć kählerowskości. Przy odpowiedniej lokalizacji i kontroli konstrukcji forma Kählera może zostać przedłużona, co dowodzi, że elastyczność pseudowklęsłości i kählerowska regularność nie są automatycznie sprzeczne. Na tej podstawie autorzy definiują wklęsłe wypełnienia Kählera. W takim wypełnieniu potencjał Kählera w obszarze kołnierzowym pełni jednocześnie funkcję ściśle plurisubharmonicznej funkcji definiującej całą rozmaitość. Definicja ta jest elegancka, gdyż łączy dwa światy w jednym obiekcie: funkcja potencjału Kählera, generująca formę Kählera, jest zarazem funkcją definiującą silnie pseudowklęsły brzeg. Brzeg nie zostaje zatem dopisany do struktury Kählera z zewnątrz, lecz wynika bezpośrednio z jej potencjału. To matematyczna forma spójności: jeden obiekt pełni dwie funkcje dzięki wewnętrznej zgodności konstrukcji.

W tym miejscu pojawia się otwarty problem. Pozostaje nierozwiązane pytanie, czy fakt dopuszczania wklęsłego wypełnienia Kählera implikuje bezpośrednio wypełnialność w sensie Steina. Problem ten jest niezwykle interesujący, gdyż dotyka relacji między kählerowską regularnością po stronie wklęsłej a Steinowską wypełnialnością po stronie wypukłej. Innymi słowy: czy możliwość bycia brzegiem wklęsłego wypełnienia Kählera niesie ukrytą informację o bardziej klasycznej, wypukłej wypełnialności? Czy kählerowskość wklęsłego wnętrza jest wystarczająco silna, by wymusić Steinowski porządek w innym obszarze? W przywołanym materiale nie znamy odpowiedzi, dlatego należy potraktować to pytanie poważnie, bez udawania rozstrzygnięcia.

Siła tego problemu polega na połączeniu dwóch paradygmatów: elastycznej i uniwersalnej wklęsłości holomorficznej oraz restrykcyjnej kählerowskości. Pytanie brzmi, czy dodanie kählerowskości do wklęsłego wypełnienia przywraca część rygoru właściwego przestrzeniom Steinowskim. To matematyczna wersja pytania o to, czy wolność ograniczona silną formą wewnętrzną zaczyna sama produkować reguły podobne do dyscypliny.

Pytanie to domyka most między pierwszą a drugą częścią opracowania. Pierwsza część, poświęcona nie-kählerowskim powierzchniom zespolonym, wykazała, że kählerowskość nie wyczerpuje świata struktur zespolonych. Druga, dotycząca pseudowklęsłości, pokazuje, że wypełnienia holomorficzne nie muszą zachowywać się jak wypełnienia Steinowskie. Problem wklęsłych wypełnień Kählera bada jednak, czy w pewnych warunkach oba porządki spotykają się ponownie – nie przez powrót do dawnej prostoty, lecz poprzez bardziej subtelne kryterium.

Tutaj matematyka odsłania swój najlepszy temperament: nie zadowala się hasłem „wszystko jest możliwe”, lecz pyta, w jakiej klasie obiektów, z jaką strukturą dodatkową i pod jakimi warunkami zachodzą dane procesy. Elastyczność pseudowklęsłości jest faktem, natomiast kählerowska kontrola stanowi dodatkowy warunek; relacja między nimi pozostaje obszarem żywych badań. Jest to przykład dojrzałej teorii, która potrafi udowodnić twierdzenie uniwersalne, a jednocześnie wskazać problem, którego jeszcze nie potrafi zamknąć.

Silna pseudowklęsłość ma również znaczenie dla rozumienia brzegów. W geometrii klasycznej brzeg często jest ograniczeniem obszaru; w analizie zespolonej staje się nośnikiem warunków przedłużania funkcji i domen holomorficzności, a w geometrii kontaktowej – autonomicznym obiektem z własną strukturą. W teorii Kasuyi i Zuddasa brzeg staje się miejscem niezwykłej swobody realizacyjnej: dowolna dodatnia zamknięta trójwymiarowa rozmaitość kontaktowa może być takim brzegiem. To przesuwa nasze rozumienie granicy – nie jest ona murem, lecz interfejsem konstrukcji. Można więc powiedzieć, że pseudowklęsłość rehabilituje brzeg jako przestrzeń możliwości.

W świecie pseudowypukłym brzeg jest sprawdzianem dyscypliny wnętrza; w świecie pseudowklęsłym – punktem wyjścia do konstruowania wnętrz. W pierwszym przypadku pytamy, czy dana struktura kontaktowa zasługuje na Steinowskie wypełnienie, w drugim: jak zbudować holomorficzne wypełnienie dla zadanej struktury kontaktowej. Zamiast selekcji mamy realizację, zamiast testu dopuszczalności – procedurę budowy. Nie oznacza to, że świat pseudowklęsły jest „łatwiejszy”, lecz po prostu inny; jego trudność nie polega na szukaniu przeszkód, a na zrozumieniu bogactwa konstrukcji. Jeżeli każde (M,ξ) ma nieskończenie wiele wklęsłych wypełnień holomorficznych, pojawia się pytanie o ich klasyfikację: typy biholomorficzne, własności topologiczne, relację do kählerowskości czy zachowanie pod doklejaniem rączek. Powszechność istnienia nie kończy problemu, lecz otwiera go na wyższym poziomie. Kasuya przesuwa uwagę z pytania „czy istnieje?” na pytanie „jakie istnieją i czym się różnią?”.

Marginesy struktur jako klucz do centrum geometrii

To typowe dla dojrzałych obszarów matematyki. Pierwszy etap teorii skupia się na poszukiwaniu przykładów i twierdzeń istnienia; drugi pyta już o klasyfikację, moduli, niezmienniki oraz relacje z innymi strukturami. Wklęsłe wypełnienia holomorficzne znajdują się właśnie w tym fascynującym punkcie: dysponujemy potężnym twierdzeniem istnienia i konstrukcją rączkową, wiemy o możliwości wypełnień kählerowskich i nie-kählerowskich, lecz wciąż pozostają pytania o głębsze konsekwencje. Tutaj ujawnia się jedność całego wywodu.

Nie-kählerowskie struktury na $\mathbb{R}^4$ dowiodły, że nawet przestrzeń topologicznie prosta może nieść nieprzeliczalnie wiele struktur zespolonych. Silna pseudowklęsłość niesie analogiczną lekcję w kontekście brzegów: dowolna dodatnia trójwymiarowa rozmaitość kontaktowa może być brzegiem nieskończenie wielu wklęsłych powierzchni holomorficznych. W obu przypadkach klasyczna intuicja regularności zostaje przekroczona, a przestrzeń okazuje się bogatsza niż jej topologia. Brzeg okazuje się bardziej twórczy niż jego funkcja ograniczająca.

Za tym aparatem stoi spór o naturę struktury: kiedy porządek jest sztywnością, kiedy elastyczność jest chaosem, kiedy brzeg jest ograniczeniem, a kiedy generatorem; kiedy topologia wystarcza, a kiedy trzeba wejść w subtelności analityczne. Kasuya pokazuje, że obszary pozornie poboczne – nie-kählerowskie powierzchnie i pseudowklęsłe brzegi – potrafią zadać pytania centralne. To jedna z piękniejszych zasad nauki: margines bywa miejscem, z którego najlepiej widać środek.

Od klasyfikacji powierzchni do filozofii brzegów. Dotychczasowa droga prowadziła przez kilka pozornie odległych krain: klasyfikację zwartych powierzchni zespolonych, powierzchnie eliptyczne, rozwłóknienia Lefschetza, nie-kählerowskie struktury na przestrzeniach euklidesowych, pseudowypukłość, przestrzenie Steina, geometrię kontaktową i silną pseudowklęsłość. Można by potraktować je jako osobne działy, ułożone w szeregu według programu specjalistycznego wykładu, lecz byłoby to odczytanie zbyt skromne.

W pracy Kasuyi obszary te tworzą jeden problem: jak geometria zespolona zachowuje się wtedy, gdy opuszcza klasyczne terytorium kählerowskiej regularności i wchodzi w przestrzenie, gdzie analiza, topologia i geometria kontaktowa muszą negocjować nowe warunki współistnienia. Pierwszym biegunem tej opowieści jest klasyfikacja. Matematyka nie klasyfikuje z pedanterii – jest to próba zrozumienia, które różnice są istotne, a które stanowią jedynie przebranie.

Nie-kählerowskość jako wynik napięcia między topologią a geometrią

W przypadku zwartych powierzchni zespolonych klasyfikacja Kodairy pokazuje, że można je porządkować według wymiaru algebraicznego, pierwszej liczby Bettiego, obecności rozwłóknień eliptycznych, typu K3, torusów czy przynależności do powierzchni algebraicznych typu ogólnego oraz klas nie-kählerowskich. Ten podział nie jest suchą taksonomią; to mapa obrazująca, jak wiele globalnej informacji przestrzeń ujawnia poprzez funkcje meromorficzne i w jakim stopniu jej topologia wspiera lub blokuje kählerowską regularność. Kluczowa różnica między powierzchniami kählerowskimi a nie-kählerowskimi w wymiarze zespolonym dwa zostaje uchwycona przez

pierwszą liczbę Bettiego. Twierdzenie Kodairy, Miyaoki i Siu precyzuje: zwarta powierzchnia zespolona jest kählerowska wtedy i tylko wtedy, gdy jej pierwsza liczba Bettiego jest parzysta.

Jest to niezwykłe zderzenie porządków. Własność, która zdaje się należeć do domeny geometrii hermitowskiej i symplektycznej, zostaje tu rozpoznana przez niezmiennik topologiczny. Topologia nie mówi wszystkiego, ale w tym przypadku mówi coś rozstrzygającego. Matematyka lubi takie momenty: zamiast hałaśliwej interpretacji otrzymujemy jedno kryterium, które robi robotę szybciej niż komisja ekspercka z podkomisją do spraw definicji.

Klasyfikacja zwarta nie wyczerpuje jednak problemu. Gdy przechodzimy do rozmaitości otwartych, prosty test topologiczny przestaje wystarczać. Z punktu widzenia topologii każda otwarta, zorientowana rozmaitość czterowymiarowa dopuszcza metrykę Kählera, co oznacza, że struktur kählerowskich i nie-kählerowskich nie da się już odróżnić wyłącznie za pomocą liczb Bettiego.

To jeden z punktów zwrotnych całej opowieści. Zwartość pełniła funkcję dyscyplinującą; gdy jej zabrakło, teoria musiała poszukać subtelniejszych narzędzi. Pojawia się zatem kryterium zwartej krzywej zespolonej reprezentującej trywialną drugą klasę homologii: jej obecność wyklucza kählerowskość, gdyż dodatniość formy Kählera koliduje z trywialnością homologiczną. Ta zmiana ma fundamentalne znaczenie metodologiczne.

Nie-kählerowskość przestaje być prostym skutkiem nieparzystej liczby Bettiego, a staje się własnością, którą należy tropić poprzez relację między krzywymi zespolonymi, homologią i formami zamkniętymi. Geometria otwarta wymaga zatem większej czujności. Gdy znikają proste bariery topologiczne, łatwo pomylić brak oczywistej przeszkody z istnieniem struktury. Matematyka uczy tu sceptycyzmu lepiej niż niejeden podręcznik metodologii: jeśli kryterium przestało działać, nie oznacza to, że problem zniknął. Oznacza tylko, że problem nauczył się lepiej ukrywać.

Drugim biegunem jest rozwłóknienie. Powierzchnie eliptyczne i rozwłóknienia Lefschetza pokazują, że przestrzeń można rozumieć nie jako statyczną całość, lecz przez rodzinę włókien i ich degeneracje. Regularne włókno definiuje typ ogólny struktury, natomiast włókna osobliwe wskazują, gdzie i jak ta struktura doświadcza załamania. Rozwłóknienie Lefschetza – z lokalnym modelem osobliwości $w=z_1z_2$, cyklami znikającymi i monodromią jako prawoskrętnym obrotem Dehna – stanowi mechanizm tłumaczenia geometrii zespolonej na topologię czterowymiarową.

W tym języku degeneracja nie jest porażką, lecz informacją. Cykl znikający, który w regularnym włóknie jest pętlą, a w osobliwym kurczy się do punktu, koduje zmianę topologiczną. Monodromia zapisuje zachowanie rodziny włókien przy obchodzeniu osobliwości. Obrót Dehna staje się literą w alfabecie przejść.

Właśnie dlatego twierdzenia Kasa, Moishezona i Matsumoto mają tak duże znaczenie: dowodzą one, że typ dyfeomorfizmu powierzchni eliptycznych bez włókien wielokrotnych można uchwycić przez konkretne dane, takie jak charakterystyka Eulera i rodzaj bazy.

Trzecim biegunem jest wymiar cztery. W całej tej historii nie jest on przypadkową sceną, lecz miejscem szczególnego napięcia między strukturą gładką, topologią, zespolonością a symplektycznością. Fenomen ten wyraźnie widać w konstrukcjach nie-kählerowskich struktur zespolonych na R2n. Dla n=1 odpowiedź na pytanie o takie struktury jest negatywna. Dla n≥3 działa klasyczna konstrukcja Calabiego-Eckmanna na iloczynach nieparzystowymiarowych sfer, z których po wycięciu komórki otrzymuje się przestrzenie euklidesowe wyposażone w strukturę nie-kählerowską. Natomiast R4, czyli wymiar zespolony dwa, wymaga osobnej, subtelniejszej konstrukcji. Tu pojawia się praca Di Scali, Kasuyi i Zuddasa, oparta na szkielecie rozwłóknienia Matsumoto-Fukayi.

Konstrukcja ta łączy model otoczenia osobliwego włókna eliptycznego typu I1 z iloczynem holomorficznego pierścienia i dysku, a następnie skleja te fragmenty w powierzchnię E(ρ1,ρ2), dyfeomorficzną z R4. Tak uzyskana przestrzeń posiada holomorficzne rozwłóknienie nad CP1, a jej włókna są krzywymi eliptycznymi, osobliwym włóknem typu I1 albo holomorficznymi pierścieniami. Najmocniejszy wniosek brzmi: na R4 istnieje nieprzeliczalnie wiele parami nie-biholomorficznych nie-kählerowskich struktur zespolonych. To twierdzenie ma siłę zmiany intuicji.

Od rygoru przestrzeni Steina do elastyczności brzegów kontaktowych

$\mathbb{R}^4$ wydaje się przestrzenią prostą, euklidesową i elementarną. Jednak prosta topologia nie oznacza jednej geometrii zespolonej, ani nawet przeliczalnej rodziny takich geometrii. To raczej scena, na której można zbudować nieprzeliczalnie wiele struktur, nierównoważnych biholomorficznie. Podważa to potoczne przekonanie, że "prosta przestrzeń" musi posiadać prostą geometrię. Prosta przestrzeń może być jak pusta kartka: uboga tylko dla tego, kto nie umie pisać.

Czwartym biegunem jest Steinowskość, czyli rygor funkcji holomorficznych. Przestrzeń Steina jest holomorficznie wypukła; posiada funkcje holomorficzne rozdzielające punkty i dostarczające lokalnych współrzędnych. Twierdzenie Remmerta-Bishopa-Narasimhana mówi, że każdą rozmaitość Steina wymiaru n można zanurzyć jako domkniętą podrozmaitość zespoloną w $\mathbb{C}^{2n+1}$, natomiast twierdzenie Grauerta charakteryzuje rozmaitości Steina poprzez istnienie wyczerpującej, ściśle plurisubharmonicznej funkcji. To świat, w którym funkcje

holomorficzne nie są dodatkiem do struktury, lecz jej zasadą organizującą. Przestrzenie Steina pokazują, czym jest pełna analityczna kontrola: funkcje globalne potrafią rozdzielać punkty, budować współrzędne i kontrolować zwartość holomorficznych powłok. Ściśle plurisubharmoniczna funkcja wyczerpująca nadaje przestrzeni globalny potencjał, a brzeg silnie pseudowypukły jest poziomicą takiej funkcji w kołnierzu. W tym świecie brzeg nie jest dowolny — Jest śladem rygoru wnętrza. I właśnie dlatego zwykłe, wypukłe wypełnienia holomorficzne są restrykcyjne; materiał źródłowy wskazuje, że w wymiarze trzecim holomorficzna wypełnialność jest de facto równoważna byciu brzegiem rozmaitości Steina.

Piątym biegunem jest brzeg kontaktowy. Geometria kontaktowa w wymiarze trzecim pojawia się naturalnie jako struktura dziedziczona przez brzeg rozmaitości zespolonej. Struktura kontaktowa to maksymalnie niecałkowalne pole płaszczyzn, lokalnie będące jądrem formy α spełniającej $ \alpha \wedge d\alpha \neq 0$. Twierdzenie Darboux mówi, że lokalnie wszystkie takie struktury wyglądają tak samo, a twierdzenie Graya wykazuje stabilność struktur kontaktowych wobec gładkich deformacji na rozmaitości zwartej. Te dwa wyniki przesuwają punkt ciężkości teorii z lokalności na globalność. Skoro lokalnie nie istnieją niezmienniki, cała powaga kontaktowości ujawnia się w skali globalnej: w węzłach, otwartych księgach, chirurgiach oraz strukturach napiętych i przekręconych. Węzły Legendre'a i węzły transwersalne wyrażają dwa sposoby relacji krzywej do płaszczyzn kontaktowych. Węzeł Legendre'a jest wszędzie styczny do płaszczyzny kontaktowej, podczas gdy węzeł transwersalny przecina ją w każdym punkcie. Ten techniczny podział staje się później zasadą konstrukcyjną: w Steinowskiej konstrukcji Eliashberga rączki dokleja się wzdłuż węzłów Legendre'a, natomiast w konstrukcji Kasuyi i Zuddasa wklęsła rączka holomorficzna doklejana jest wzdłuż węzła transwersalnego. To nie jest wymiana słownika. To przejście z jednej logiki brzegu do drugiej. Szóstym biegunem jest silna pseudowklęsłość — to tutaj książka Kasuyi osiąga swój najbardziej wyrazisty rezultat.

Uniwersalna realizowalność wypełnień w obszarze silnej pseudowklęsłości

Rozmaitość silnie pseudowklęsła znajduje się powyżej poziomu zerowego ściśle plurisubharmonicznej funkcji definiującej, a jej brzeg indukuje ujemną strukturę kontaktową. Wklęsłe wypełnienie holomorficzne jest z kolei silnie pseudowklęsłą powierzchnią, której brzeg pozostaje kontaktomorficzny z (−M,ξ), gdzie (M,ξ) to dodatnia zwarta trójwymiarowa rozmaitość kontaktowa. Kluczowy wynik wskazuje, że każda taka rozmaitość dopuszcza nieskończenie wiele wklęsłych wypełnień holomorficznych.

W tym punkcie cała wcześniejsza architektura staje się czytelna. Po stronie pseudowypukłej wypełnialność jest restrykcyjna; po stronie pseudowklęsłej mamy do czynienia z uniwersalną realizowalnością. Nie wynika ona jednak z anarchii, lecz z konkretnej konstrukcji: holomorficznego doklejania dwurączki, transwersalnych okręgów doklejających oraz kontaktowych chirurgii Dehna (+1) i (−1). Zgodnie z twierdzeniem Dinga i Geigesa dowolne dwie dodatnie rozmaitości kontaktowe można połączyć ciągiem takich operacji. Wyłania się stąd główna myśl całego wywodu: odwrócenie brzegu zmienia strukturę możliwości. Pseudowypukłość selekcjonuje, pseudowklęsłość realizuje, a Steinowskość dyscyplinuje. Wklęsłe wypełnienie holomorficzne otwiera natomiast drogę do elastyczności. Podczas gdy kählerowskość harmonizuje strukturę zespoloną, metryczną i symplektyczną, brak tej cechy dowodzi, że taka harmonia nie jest warunkiem istnienia bogatej geometrii zespolonej. Rozwłóknienia Lefschetza uczą nas, że degeneracja może stać się narzędziem klasyfikacji, a konstrukcje na R4 pokazują, iż prosta topologia potrafi skrywać nieprzeliczalną różnorodność analityczną.

Synteza ta ma również wymiar filozofii matematyki. Nie chodzi tu o przeciwstawienie „regularnego” i „nieregularnego” w kategoriach dobra i zła. Byłby to infantylny moralizm geometryczny, a matematyka ma już wystarczająco dużo trudności bez dopisywania jej katechizmu.

Istotą jest raczej zrozumienie dwóch trybów organizacji. Tryb kählerowsko-Steinowski to reżim maksymalnej zgodności: funkcje, metryka, forma symplektyczna, potencjał plurisubharmoniczny i brzeg kontaktowy tworzą spójną całość. Tryb nie-kählerowsko-pseudowklęsły operuje natomiast trybem strukturalnej nadwyżki: przestrzenie i brzegi istnieją poza wspomnianym reżimem, lecz nie poza geometrią. Są mniej posłuszne, ale nie mniej rzeczywiste.

Książka Kasuyi wpisuje się w szerszy nurt współczesnej matematyki – odejście od badania wyłącznie obiektów najbardziej regularnych na rzecz struktur granicznych, elastycznych i nieklasycznych. Dojrzała matematyka wie, że centrum teorii często najlepiej rozumie się poprzez jej wyjątki. Rozmaitości nie-kählerowskie definiują kählerowskość, pokazując, czego jej brakuje i co dzięki niej staje się możliwe. Silnie pseudowklęsłe powierzchnie ujawniają naturę pseudowypukłości, obrazując radykalną zmianę świata po odwróceniu strony brzegu. Geometria kontaktowa z kolei redefiniuje brzeg, odbierając mu status biernej granicy i nadając mu własną strukturę. Co więcej, cała teoria nieustannie przekracza granice dyscyplinarne.

Analiza zespolona dostarcza funkcji holomorficznych, plurisubharmoniczności i przestrzeni Steina. Topologia różniczkowa wnosi rozwłóknienia Lefschetza, rączki, chirurgię oraz szczególną wrażliwość wymiaru cztery. Geometria kontaktowa daje język brzegu: struktury kontaktowe, węzły Legendre'a i transwersalne, otwarte księgi, napiętości i przekręcenia. Geometria symplektyczna stanowi tło w postaci form zamkniętych i wypełnialności. Żaden z tych języków nie jest

samowystarczalny; dopiero ich splot tworzy pełny obraz. Wąska specjalizacja zapewnia precyzję, lecz czasem gubi fenomen, podczas gdy interdyscyplinarność pozbawiona rygoru prowadzi do mgły, w której wszystko łączy się ze wszystkim, a w efekcie nic nie wynika z niczego.

Kasuya wskazuje trzecią drogę: precyzyjne przejścia między językami. Nie ogranicza się do ogólnych stwierdzeń o powiązaniu topologii z analizą, lecz operuje konkretami: rozwłóknieniami Lefschetza jako odpowiednikiem powierzchni eliptycznych, konstrukcjami Matsumoto-Fukayi dla R4, chirurgią kontaktową jako narzędziem transformacji brzegów oraz holomorficznym doklejaniem rączki jako realizacją operacji kontaktowych przez powierzchnie pseudowklęsłe.

Całość posiada również walor dydaktyczny. Uczy, że definicje nie są etykietami, lecz narzędziami przejścia. „Kählerowski" nie oznacza po prostu „ładny", a „nie-kählerowski" nie jest synonimem czegoś „wadliwego". „Pseudowypukły" to nie „trochę wypukły", „pseudowklęsły" nie znaczy „odwrócony i mniej ważny", a „kontaktowy" nie oznacza jedynie bycia „dodatkiem na brzegu".

Nie-kählerowskość jako pozytywna treść geometryczna

Każde z tych pojęć pełni określoną funkcję w większej maszynie teoretycznej. Definicje są tu jak części silnika: można je wypolerować, ale kluczowe jest to, czy skutecznie przenoszą ruch. Najważniejsza lekcja płynie z relacji między ograniczeniem a możliwością. W matematyce ograniczenia nie stanowią przeszkody dla twórczości – są warunkiem jej sensu. Kählerowskość ogranicza, lecz dzięki temu pozwala formułować potężne twierdzenia. Steinowskość narzuca rygor, ale w zamian oferuje zanurzenia, funkcje wyczerpujące i kontrolę holomorficzną. Pseudowypukłość stawia granice, dzięki czemu wiemy, kiedy brzeg może być granicą domeny holomorficzności. Z kolei pseudowklęsłość jest elastyczna, lecz jej wartość wynika właśnie z tego, że została uchwycona przez rygor konstrukcji. To nie jest swoboda dowolności. To swoboda udowodniona.

Twierdzenie o nieskończonej liczbie wklęsłych wypełnień holomorficznych dla każdej dodatniej zamkniętej trójwymiarowej rozmaitości kontaktowej to coś więcej niż tylko „duży wynik". To zmiana perspektywy. Pokazuje, że po jednej stronie brzegu świat może być selektywny, a po drugiej uniwersalny; że ta sama struktura kontaktowa może być interpretowana przez różne typy wnętrza. Dowodzi, że brzeg nie posiada jednej ontologii – zależy ona od strony, z której do niego podchodzimy. Jeśli brzmi to filozoficznie, to dobrze; jeśli zbyt filozoficznie, tym lepiej wrócić do doklejania rączek, bo ono nie pozwala odlecieć za wysoko.

Nie-kählerowskość jako metoda widzenia: matematyka poza kultem idealnej regularności

Na końcu drogi trzeba powrócić do punktu wyjścia, lecz z nową świadomością. Tematem nie były jedynie „nie-kählerowskie powierzchnie zespolone” i „silnie pseudowklęsłe powierzchnie”. Taki opis byłby formalnie poprawny, ale intelektualnie zbyt wąski. W rzeczywistości chodzi o głębszą kwestię: o to, jak matematyka rozpoznaje struktury, które nie mieszczą się w klasycznym, najwygodniejszym modelu regularności, a mimo to nie są anomalią. Stanowią one pełnoprawny obszar poznania. Nie-kählerowskość i pseudowklęsłość nie są marginesami teorii – są narzędziami odsłaniania tego, co niewidoczne z centrum.

Kählerowskość przez długi czas była jednym z najbardziej uprzywilejowanych języków geometrii zespolonej. Nic dziwnego: rozmaitości Kählera łączą strukturę zespoloną, metrykę hermitowską i formę symplektyczną w układ wyjątkowo harmonijny. W tym świecie topologia wspiera analizę, analiza geometrię, a geometria pozwala budować silne twierdzenia klasyfikacyjne. Taki ład jest pociągający, bo daje poczucie, że matematyczna rzeczywistość ma strukturę dobrze zarządzanej republiki: prawo jest spójne, instytucje współpracują, a każdy niezmiennik wie, do którego okienka ma podejść. Problem zaczyna się jednak w momencie, gdy tę republikę uzna się za cały kontynent.

Nie-kählerowskie powierzchnie zespolone dowodzą, że poza tą republiką istnieją struktury, których nie wolno redukować do samego „braku”. Powierzchnie Hopfa, Kodairy czy Inoue i Inoue-Hirzebrucha nie są jedynie „nie-Kählerami” – tak jak człowiek nie jest „nie-urzędnikiem”, a kot „nie-psem”, choć wiele instytucji zapewne próbowałoby zacząć klasyfikację właśnie w ten sposób. Powierzchnie Hopfa należą do klasy VII, mają $b_1=1$ i uniwersalne nakrycie $\mathbb{C}^2\setminus\{0\}$; powierzchnie Kodairy (pierwotne lub wtórne) są klasycznymi przykładami rozmaitości zespolonych i symplektycznych niedopuszczających metryki Kählera; powierzchnie Inoue wyróżniają się brakiem zwartych krzywych zespolonych, natomiast Inoue-Hirzebrucha zawierają specyficzne cykle krzywych wymiernych.

Każda z tych rodzin posiada własną, pozytywną treść geometryczną. Należy to mocno podkreślić: nie-kählerowskość nie jest pustą negacją, lecz informacją o tym, w jaki sposób struktura zespolona nie daje się zsynchronizować z zamkniętą formą Kählera. Czasem przeszkoda ma charakter topologiczny, jak nieparzystość pierwszej liczby Bettiego w przypadku zwartych powierzchni zespolonych. Innym razem jest subtelniejsza, jak obecność zwartej krzywej zespolonej reprezentującej trywialną klasę homologii w rozmaitości otwartej. W obu przypadkach nie-kählerowskość sygnalizuje: tutaj harmonia trzech porządków nie zachodzi, ale sama struktura nie znika – zaczyna po prostu mówić innym językiem.

Ten inny język staje się szczególnie wyraźny w konstrukcji nie-kählerowskich struktur zespolonych na $\mathbb{R}^4$. Trudno o przestrzeń bardziej symbolicznie „prostą” niż euklidesowe $\mathbb{R}^4$, a jednak dzięki pracy Di Scali, Kasuyi i Zuddasa okazuje się, że można na niej

zbudować nieprzeliczalnie wiele parami nie-biholomorficznych struktur nie-kählerowskich. Konstrukcja oparta na szkielecie rozwłóknienia Matsumoto-Fukayi, modelu osobliwego włókna eliptycznego typu I_1, holomorficznym pierścieniu i dysku prowadzi do powierzchni $E(\rho_1,\rho_2)$, która jest dyfeomorficzna z $\mathbb{R}^4$, lecz analitycznie bogata i nie-kählerowska. To jeden z najważniejszych momentów tej opowieści: topologiczna prostota nie rozstrzyga o analitycznej jednoznaczności. Można dysponować przestrzenią dyfeomorficzną z $\mathbb{R}^4$, a mimo to obdarzoną strukturą zespoloną tak odmienną od standardowego $\mathbb{C}^2$, że nie da się jej sprowadzić do kählerowskiego porządku.

Pseudowklęsłość jako obszar radykalnej elastyczności strukturalnej

To uczy pokory wobec pojęcia „standardowości". W matematyce standard jest często tylko jednym z wielu możliwych porządków, tyle że najlepiej oswojonym. Gdy pojawia się konstrukcja niestandardowa, nie należy pytać wyłącznie o to, dlaczego odbiega od wzorca, lecz raczej: co ten wzorzec dotąd zasłaniał? Rozwłóknienia Lefschetza pełnią w tym procesie rolę mechanizmu translacyjnego.

Pozwalają one przejść od geometrii zespolonej do topologii różniczkowej i z powrotem. Ich lokalne osobliwości, cykle znikające i monodromie w postaci obrotów Dehna dowodzą, że degeneracja może być nośnikiem struktury. Jest to kluczowe, gdyż klasyczny język regularności często traktuje osobliwość jako problem do usunięcia. Tymczasem w topologii czterowymiarowej i geometrii zespolonej osobliwość bywa źródłem informacji. Nie jest zwykłą awarią, lecz skondensowaną wiadomością o globalnym układzie. Ta sama zasada obowiązuje w teorii brzegów: brzeg nie stanowi jedynie dodatku do wnętrza. W rozmaitościach silnie pseudowypukłych i pseudowklęsłych przechowuje on strukturę kontaktową. Zespolone styczności brzegu tworzą pole płaszczyzn, które w wymiarze trzecim staje się autonomicznym obiektem geometrii kontaktowej.

Tu ponownie klasyczna intuicja zostaje przesunięta. Brzeg nie jest po prostu granicą, na której kończy się rozmaitość; to miejsce, w którym wnętrze przekazuje informację do innego języka matematycznego. Geometria kontaktowa obrazuje to doskonale: to, co lokalnie jednolite, globalnie może być niezwykle zróżnicowane. Twierdzenie Darboux mówi, że lokalnie wszystkie struktury kontaktowe wyglądają tak samo, a twierdzenie Graya wskazuje na stabilność deformacji na rozmaitościach zwartych. Mimo to globalna teoria struktur kontaktowych pozostaje bogata: obejmuje węzły Legendre'a i transwersalne, struktury napięte i przekręcone, rozkłady na otwarte księgi, teorię powierzchni wypukłych, zbiory dzielące czy chirurgie kontaktowe Dehna.

To kolejna lekcja przeciwko naiwnej lokalności. Jeżeli wszystko lokalnie wygląda tak samo, różnica musi tkwić w sposobie globalnego sklejenia. Jak wiadomo nie tylko matematykom, jest to zwykle miejsce, gdzie zaczyna się prawdziwa polityka struktury. Najbardziej spektakularny rezultat pojawia się po stronie pseudowklęsłej. Kasuya i Zuddas wykazują, że każda dodatnia, zamknięta trójwymiarowa rozmaitość kontaktowa dopuszcza nieskończenie wiele wklęsłych wypełnień holomorficznych. Twierdzenie to stanowi lustrzany kontrapunkt wobec restrykcyjności wypełnień pseudowypukłych i Steinowskich. W świecie pseudowypukłym nie każdy brzeg może zostać wypełniony; w świecie pseudowklęsłym każdy dodatni kontaktowy brzeg może zostać zrealizowany, i to na nieskończenie wiele sposobów. Odwrócenie strony brzegu zmienia więc nie tylko znak, ale cały ustrój problemu. Mechanizm tego dowodu jest równie istotny, co sam wynik.

Kasuya i Zuddas opracowują metodę holomorficznego doklejania dwurączki do silnie pseudowklęsłego brzegu. Konstrukcja ta przypomina klasyczne handle attaching Eliashberga dla rozmaitości Steina, lecz różni się w punkcie decydującym: u Eliashberga wypukła rączka z całkowicie rzeczywistym dyskiem jako rdzeniem doklejana jest wzdłuż węzła Legendre'a, natomiast u Kasuyi i Zuddasa wklęsła rączka holomorficzna posiada rdzeń w postaci dysku holomorficznego i jest doklejana wzdłuż węzła transwersalnego.

Logika realizacji kontra logika selekcji

Ta różnica obrazuje przejście od sztywności do elastyczności. Dzięki transwersalnemu okręgowi doklejającemu konstrukcja realizuje obie kontaktowe chirurgie Dehna: (+1) oraz (−1). Następnie, w oparciu o twierdzenie Dinga i Geigesa, według którego każdą parę dodatnich rozmaitości kontaktowych można połączyć ciągiem takich chirurgii, uzyskuje się wypełnienie dla dowolnej zadanej struktury kontaktowej. Wynik globalny powstaje tu z precyzyjnego zestawienia lokalnej konstrukcji, operacji topologicznej i twierdzenia klasyfikacyjno-transformacyjnego. Silna pseudowklęsłość dowodzi, że brzeg może być nie tylko ograniczeniem, lecz także generatorem. W przypadku pseudowypukłości brzeg testuje, czy wnętrze może być Steinowskie lub holomorficznie wypukłe; w pseudowklęsłości staje się on punktem wyjścia do konstrukcji wnętrza. Różnica ta ma znaczenie wykraczające poza samą terminologię. W pierwszym przypadku mamy logikę selekcji: tylko niektóre struktury kontaktowe spełniają warunki wypełnialności. W drugim dominuje logika realizacji: każda dodatnia zamknięta struktura kontaktowa może być brzegiem wklęsłej powierzchni holomorficznej. To dwa różne style geometrii.

Jednocześnie Kasuya nie pozwala zamienić elastyczności w banalny triumf. Ostatnim poziomem analizy jest pytanie o kählerowskość wypełnień wklęsłych. Materiał źródłowy wskazuje, że wklęsłe

wypełnienia holomorficzne można skonstruować tak, aby były kählerowskie lub nie-kählerowskie. Co więcej, jeśli wyjściowa powierzchnia jest kählerowska i posiada silnie pseudowklęsły brzeg, formę Kählera można gładko przedłużyć na doklejoną wklęsłą rączkę holomorficzną, pod warunkiem, że rączka zostanie doklejona odpowiednio blisko granicy. Oznacza to, że elastyczność pseudowklęsłej konstrukcji nie musi niszczyć struktury kählerowskiej.

Nie oznacza to jednak automatycznego powrotu do świata Steina. Stąd kluczowe znaczenie problemu otwartego: czy z faktu dopuszczania wklęsłego wypełnienia Kählera wynika wypełnialność w sensie Steina? Pytanie to dotyka przecięcia trzech porządków: kählerowskiej dyscypliny, pseudowklęsłej elastyczności i Steinowskiej wypełnialności. Gdyby odpowiedź była twierdząca, oznaczałoby to, że kählerowskość po stronie wklęsłej niesie ukrytą informację o możliwości wypukłego wypełnienia. Odpowiedź negatywna jeszcze mocniej rozdzieliłaby dwa światy brzegowej geometrii. Sam fakt, że problem pozostaje otwarty, dowodzi, iż teoria nie została wyczerpana przez twierdzenie o elastyczności. Nie wszystko zostaje domknięte; niektóre przejścia są udowodnione, inne pozostają pytaniami. Dobry artykuł naukowy nie powinien udawać, że mapa jest pełna, kiedy na jej brzegu widać jeszcze białe plamy. Właśnie te białe plamy są często najciekawsze. Problem wklęsłych wypełnień Kählera i Steinowskiej wypełnialności nie jest luką w narracji, lecz zaproszeniem do dalszych badań.

Geometria zespolona jako dynamiczne napięcie między rygorem a elastycznością

Gdyby spróbować ująć sens całego wywodu w jednym zdaniu, brzmiałoby ono tak: geometria zespolona nie jest teorią jednego ideału regularności, lecz nauką o wielu sposobach organizowania struktury, z których kählerowskość i Steinowskość są szczególnie silne, ale nie jedyne. Powierzchnie nie-kählerowskie oraz silnie pseudowklęsłe brzegi dowodzą, że poza klasycznym centrum istnieje obszar bogaty konstrukcyjnie i głęboko powiązany z topologią czterowymiarową oraz geometrią kontaktową.

To nie jest przypis do głównego tekstu, lecz rozdział, bez którego całość stałaby się zbyt pewna siebie. Cała teoria uczy nowoczesnego rozumienia relacji między lokalnością a globalnością. Lokalnie struktury kontaktowe są standardowe, ale globalnie tworzą złożony świat. Lokalnie osobliwości Lefschetza mają prosty model, lecz ich globalne monodromie klasyfikują rozwłóknienia. Lokalnie rozmaitość zespolona przypomina $\mathbb{C}^n$, jednak w skali globalnej może być nie-kählerowska, Steinowska, pseudowypukła, pseudowklęsła, eliptyczna lub posiadać zaskakujące krzywe homologicznie trywialne. Matematyka powtarza tu jedną lekcję:

lokalna poprawność nie gwarantuje globalnej prawdy. To wniosek o dużej sile również poza matematyką, choć nie trzeba go na siłę zamieniać w publicystyczną metaforę. Wystarczy stwierdzić, że geometria zespolona ukazuje strukturalny sens granic, wyjątków i degeneracji. Granica może być nośnikiem informacji, wyjątek odsłaniać definicję centrum, a degeneracja kodować zmianę globalną.

Elastyczność może być rygorystycznie skonstruowana, a prostota topologiczna skrywać wielość analityczną. To twierdzenia matematyczne, które brzmią jak zasady poprawnego myślenia w ogóle. Naohiko Kasuya, prowadząc czytelnika przez nie-kählerowskie i silnie pseudowklęsłe powierzchnie zespolone, nie tylko porządkuje specjalistyczny obszar, ale pokazuje styl myślenia, w którym klasyczna teoria nie zostaje odrzucona, lecz przekroczona poprzez własne granice.

Klasyfikacja Kodairy pozostaje fundamentem, przestrzenie Steina wzorem rygoru, a rozmaitości Kählera miejscem harmonii. Warto jednak badać to, co nie-kählerowskie i pseudowklęsłe – nie po to, by zastąpić centrum marginesem, lecz aby centrum przestało mylić własną wygodę z pełnią rzeczywistości. To najważniejsza wartość całej rekonstrukcji. Matematyka rozwija się bowiem nie tylko przez pogłębianie tego, co regularne, ale i przez odważne pytania o obiekty, które klasyczny aparat opisuje z trudem. Nie-kählerowskie struktury na $\mathbb{R}^4$, achiralne rozwłóknienia Lefschetza, kontaktowe chirurgie Dehna, wklęsłe rączki holomorficzne i silnie pseudowklęsłe wypełnienia są przykładami takiego przesunięcia. Tam, gdzie dawna intuicja widziała peryferia, nowa teoria widzi laboratorium. W finale artykułu należy zatem nie tylko podsumować pojęcia, lecz wskazać ich sens aksjologiczny: wartość precyzji, badania granic i odróżniania defektu od alternatywnej struktury, a także wartość otwartych problemów i konstrukcji poszerzających pole możliwego. Najlepsza matematyka nie mówi bowiem, że świat jest prosty. Mówi raczej, że świat jest bardziej uporządkowany, niż myśleliśmy, ale ten porządek nie zawsze ma kształt, którego oczekiwaliśmy.

Naohiko Kasuya, "Non-Kahler Complex Surfaces"

> Czy kählerowska regularność jest faktycznie najwyższym stadium uporządkowania przestrzeni, czy może jedynie wygodnym modelem, który przez lata przesłaniał nam prawdziwą naturę geometrii? Być może to właśnie w obszarach nie-kählerowskich i pseudowklęsłych, tam gdzie kończy się analityczny salon, a zaczyna warsztat chirurgii Dehna, kryje się pełnia rzeczywistości zespolonej. Ostatecznie największa wartość matematyki objawia się wtedy, gdy odkrywamy, że świat jest uporządkowany w sposób znacznie bardziej intrygujący, niż pozwalały nam przypuszczać nasze oczekiwania.

Inspiracje

[1]

"Non-Kahler Complex Surfaces" Naohiko Kasuya

2025 | Springer Nature | ISBN: 978-981-96-3002-8

Naohiko Kasuya jest matematykiem i profesorem nadzwyczajnym na Wydziale Nauk Ścisłych Uniwersytetu Hokkaido. W 2014 roku uzyskał tytuł doktora nauk matematycznych na Uniwersytecie Tokijskim. Jego badania koncentrują się głównie na geometrii zespolonej, topologii różniczkowej i geometrii kontaktowej, ze szczególnym uwzględnieniem nie-Kählera powierzchni zespolonych, silnie pseudowklęsłych granic oraz połączeń osobliwości hiperpowierzchniowych, takich jak osobliwości wierzchołkowe. Przed dołączeniem do Uniwersytetu Hokkaido Kasuya zajmował stanowiska naukowe na Uniwersytecie Tokijskim, Uniwersytecie Aoyama Gakuin i Uniwersytecie Kioto Sangyo. Wniósł znaczący wkład w badania struktur zespolonych na rozmaitościach czterowymiarowych oraz struktur kontaktowych połączeń osobliwych, publikując liczne recenzowane artykuły w czasopismach takich jak „Journal of Symplectic Geometry" i „Transactions of the American Mathematical Society".

Naohiko Kasuya *is a mathematician and an associate professor at the Faculty of Science, Hokkaido University. He earned his PhD in Mathematical Sciences from the University of Tokyo in 2014. His research primarily focuses on complex geometry, differential topology, and contact geometry, with a particular interest in non-Kähler complex surfaces, strongly pseudoconcave boundaries, and the links of complex hypersurface singularities such as cusp singularities. Kasuya has held academic positions at the University of Tokyo, Aoyama Gakuin University, and Kyoto Sangyo University before joining Hokkaido University. He has contributed extensively to the study of complex structures on 4-dimensional manifolds and the contact structures of singularity links, publishing numerous peer-reviewed articles in journals such as the Journal of Symplectic Geometry and the Transactions of the American Mathematical Society.*

Hokkaido University

Literatura uzupełniająca

Książki

Literatura pokrewna (Google Scholar):

[1] **"Kodaira vanishing theorem"**
Kunihiko Kodaira

[2] **"Hirzebruch surface"**
Friedrich Hirzebruch

[3] **"Atiyah–Hirzebruch spectral sequence"**
Friedrich Hirzebruch

[4] **"Grothendieck–Hirzebruch–Riemann–Roch theorem"**
Friedrich Hirzebruch

[5] **"Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen"**
Bernhard Riemann

[6] **"Schwere, Elektricität und Magnetismus"**
Bernhard Riemann

[7] **"Local Fields"**
Jean-Pierre Serre
Springer Science & Business Media | ISBN: 9781475756739

[8] **"Serre's theorem on affineness"**
Jean-Pierre Serre

[9] **"Euler's four-square identity"**
Leonhard Euler

[10] **"Riemann–Siegel theta function"**
Carl Ludwig Siegel

[11] **"Siegel's lemma"**
Carl Ludwig Siegel

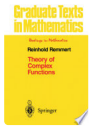
[12] **"Schwerer Lefschetz theorem"**
Solomon Lefschetz

[13] **"Holomorphic Lefschetz fixed-point formula"**
Solomon Lefschetz

[14] **"Lefschetz duality"**
Solomon Lefschetz

[15] **"Milnor–Thurston kneading theory"**
John Milnor

[16] **"Dehn's lemma"**
Max Dehn



[17] **"Theory of Complex Functions"**
Reinhold Remmert
Springer Science & Business Media | ISBN: 9781461209393

[18] **"Bishop–Phelps theorem"**
Errett Bishop

[19] **"limited principle of omniscience"**
Errett Bishop

[20] **"Grauert–Riemenschneider vanishing theorem"**
Hans Grauert

[21] **"Andreotti–Grauert theorem"**
Hans Grauert

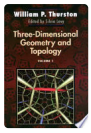
[22] **"Theory of Stein Spaces"**
Hans Grauert, R. Remmert
1979 | Springer

[23] **"Algebraic Curves and One-dimensional Fields"**
Fedor Bogomolov, Tihomir Petrov
American Mathematical Soc. | ISBN: 9780821883488

[24] **"Darboux's theorem"**
Gaston Darboux

[25] "Darboux cyclide"

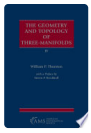
Gaston Darboux



[26] "Three-dimensional geometry and topology"

William Thurston

Princeton University Press | ISBN: 9780691083049



[27] "The geometry and topology of three-manifolds"

William Thurston

American Mathematical Society | ISBN: 9781470463915

[28] "General investigations of curved surfaces of 1827 and 1825"

Carl Friedrich Gauss

Palala Press | ISBN: 9781355442066

[29] "Complex Analysis in One Variable"

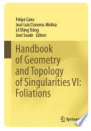
Raghavan Narasimhan

1985 | Springer Science & Business Media

[30] "Cohomological and Geometric Approaches to Rationality Problems"

Fedor Bogomolov, Yuri Tschinkel

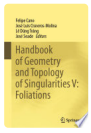
2009 | Birkhäuser | ISBN: 9780817649333



[31] "Handbook of Geometry and Topology of Singularities VI: Foliations"

Felipe Cano, José Luis Cisneros-Molina, Lê Dũng Tráng, José Seade

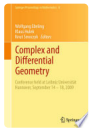
2024 | Springer Nature | ISBN: 9783031541728



[32] "Handbook of Geometry and Topology of Singularities V: Foliations"

Felipe Cano, José Luis Cisneros-Molina, Lê Dũng Tráng, José Seade

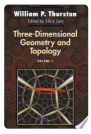
2024 | Springer Nature | ISBN: 9783031524813



[33] "Complex and Differential Geometry"

Wolfgang Ebeling, Klaus Hulek, Knut Smoczyk

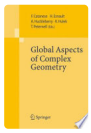
2011 | Springer Science & Business Media | ISBN: 9783642203008



[34] "Three-Dimensional Geometry and Topology, Volume 1"

William P. Thurston

2014 | Princeton University Press | ISBN: 9781400865321



[35] **"Global Aspects of Complex Geometry"**

Fabrizio Catanese, Hélène Esnault, Alan Huckleberry, Klaus Hulek, Thomas Peternell

2006 | Springer Science & Business Media | ISBN: 9783540354802

Artykuły naukowe

Autorzy przywoływani:

[1] **"Complex structures on S1x S3"**

Kunihiko Kodaira

2015 | Princeton University Press eBooks | DOI: 10.1515/9781400869879-012

Google Scholar

[2] **"50. Multifoliate structures"**

Kunihiko Kodaira, DeAnna Spencer

2015 | Princeton University Press eBooks | DOI: 10.1515/9781400869862-020

Google Scholar

[3] **"Theory of Algebraic Surfaces"**

K. Kodaira

2020 | SpringerBriefs in Mathematics | DOI: 10.1007/978-981-15-7380-4

Google Scholar

[4] **"Fundamentals of Algebraic Surfaces"**

K. Kodaira

2020 | DOI: 10.1007/978-981-15-7380-4_1

Google Scholar

[5] **"Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds"**

Janós Kollár, Yoichi Miyaoka, Шигефуми Мори

1992 | Journal of Differential Geometry | DOI: 10.4310/jdg/1214453188

Google Scholar

[6] **"The Chern Classes and Kodaira Dimension of a Minimal Variety"**

Yoichi Miyaoka

2018 | Advanced studies in pure mathematics | DOI: 10.2969/aspm/01010449

Google Scholar

[7] **"The maximal number of quotient singularities on surfaces with given numerical invariants"**

Yoichi Miyaoka

1984 | Mathematische Annalen | DOI: 10.1007/bf01456083

Google Scholar

[8] **"On the Chern numbers of surfaces of general type"**

Yoichi Miyaoka

1977 | Inventiones mathematicae | DOI: 10.1007/bf01389789

Google Scholar

[9] **"Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents"**

Yum-Tong Siu

1974 | Inventiones mathematicae | DOI: 10.1007/bf01389965

Google Scholar

[10] **"The Complex-Analyticity of Harmonic Maps and the Strong Rigidity of Compact Kahler Manifolds"**

Yum-Tong Siu

1980 | Annals of Mathematics | DOI: 10.2307/1971321

Google Scholar

[11] **"Compact k﷽hler manifolds of positive bisectional curvature"**

Yum-Tong Siu, Shing–Tung Yau

1980 | Inventiones mathematicae | DOI: 10.1007/bf01390043

Google Scholar

[12] **"Every Stein subvariety admits a Stein neighborhood"**

Yum-Tong Siu

1976 | Inventiones mathematicae | DOI: 10.1007/bf01390170

Google Scholar

[13] **"Sur les surfaces algébriques admettant des intégrales de différentielles totales de première espèce"**

Federico Enriques

1901 | Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques | DOI: 10.5802/afst.179

Google Scholar

[14] "Sur la classification des surfaces algébriques au point de vue des transformations birationnelles"

F. Enriques

1924 | Bulletin de la Société mathématique de France | DOI: 10.24033/bsmf.1075

Google Scholar

[15] "Some New Surfaces of General Type"

Masahisa Inoue

1994 | Tokyo Journal of Mathematics | DOI: 10.3836/tjm/1270127954

Google Scholar

[16] "On surfaces of class VII0"

Masahisa Inoue

1974 | Inventiones mathematicae | DOI: 10.1007/bf01425563

Google Scholar

[17] "On surfaces of class VII_0"

Masahisa Inoue

1972 | Proceedings of the Japan Academy Series A Mathematical Sciences | DOI: 10.3792/pja/1195519584

Google Scholar

[18] "Synthesis of Product Class 5"

Masahisa Inoue, Satoshi Yamashita

2008 | Ethers | DOI: 10.1055/sos-sd-037-00385

Google Scholar

[19] "Topological Methods in Algebraic Geometry"

Friedrich E. P. Hirzebruch

1966 | DOI: 10.1007/978-3-662-30697-0

Google Scholar

[20] "Vector bundles and homogeneous spaces"

Michael Francis Atiyah, Friedrich E. P. Hirzebruch

1961 | Proceedings of symposia in pure mathematics | DOI: 10.1090/pspum/003/0139181

Google Scholar

[21] **"Manifolds and Modular Forms"**

Friedrich E. P. Hirzebruch, Thomas Berger, Rainer Jung

1992 | Aspects of mathematics. E | DOI: 10.1007/978-3-663-14045-0

Google Scholar

[22] **"Neighbourhoods and isotopies of knots in contact 3-manifolds"**

Fan Ding, Hansjörg Geiges

2011 | Archiv der Mathematik | DOI: 10.1007/s00013-011-0300-z

Google Scholar

[23] **"Interpretation of single-well tracer tests using fractional-flow dimensions. Part 1: Theory and mathematical models"**

Gerrit van Tonder, Kornelius Riemann, Ingrid Dennis

2002 | Hydrogeology Journal | DOI: 10.1007/s10040-002-0198-4

Google Scholar

[24] **"Symplectic Geometry"**

Carl Ludwig Siegel

1943 | American Journal of Mathematics | DOI: 10.2307/2371774

Google Scholar

[25] **"Topics in complex function theory"**

Carl Ludwig Siegel

1969 | CERN Document Server (European Organization for Nuclear Research)

Google Scholar

[26] **"A Mean Value Theorem in Geometry of Numbers"**

Carl Ludwig Siegel

1945 | Annals of Mathematics | DOI: 10.2307/1969027

Google Scholar

[27] **"Cook-Levin Theorem Algorithmic-Reducibility/Completeness = Wilson Renormalization-(Semi)-Group Fixed-Points; ``Noise''-Induced Phase-Transitions (NITs) to Accelerate Algorithmics (``NIT-Picking'') REPLACING CRUTCHES!!!: Models: Turing-machine, finite-state-models, finite-automata"**

F. Young, E. Siegel

2016

Google Scholar

[28] "Isometric Imbedding of Complex Manifolds"

Eugenio Calabi

1953 | Annals of Mathematics | DOI: 10.2307/1969817

Google Scholar

[29] "Minimal immersions of surfaces in Euclidean spheres"

Eugenio Calabi

1967 | Journal of Differential Geometry | DOI: 10.4310/jdg/1214427884

Google Scholar

[30] "EXTREMAL KÄHLER METRICS"

Eugenio Calabi

1982 | Princeton University Press eBooks | DOI: 10.1515/9781400881918-016

Google Scholar

[31] "An extension of E. Hopf's maximum principle with an application to Riemannian geometry"

Eugenio Calabi

1958 | Duke Mathematical Journal | DOI: 10.1215/s0012-7094-58-02505-5

Google Scholar

[32] "Differential Equations--Geometric Theory"

Harry Pollard, Solomon Lefschetz

1964 | Mathematics of Computation | DOI: 10.2307/2003326

Google Scholar

[33] "Algebraic topology"

Solomon Lefschetz

1942

Google Scholar

[34] "Introduction to Topology"

Solomon Lefschetz

1949 | Princeton University Press eBooks | DOI: 10.1515/9781400879946

Google Scholar

[35] "Singular points of complex hypersurfaces"

John Milnor

1968 | UCLA - Biblioteca de Ciencias y Tecnologia Felix Morales Bueno

Google Scholar

[36] "On the Structure of Hopf Algebras"

John Milnor, John C. Moore

1965 | Annals of Mathematics | DOI: 10.2307/1970615

Google Scholar

[37] "Topology from the Differentiable Viewpoint."

Edgar H. Brown, John Milnor

1967 | American Mathematical Monthly | DOI: 10.2307/2314613

Google Scholar

[38] "Dynamics in One Complex Variable"

John Milnor

2000 | DOI: 10.1007/978-3-663-08092-3

Google Scholar

[39] "Papers on Group Theory and Topology"

Max Dehn

1987 | DOI: 10.1007/978-1-4612-4668-8

Google Scholar

[40] "COMPLEX SALTS OF QUINOLINE, MERCURIC HALIDES, WATER AND HYDROHALOGEN ACIDS"

William M. Dehn

1926 | Journal of the American Chemical Society | DOI: 10.1021/ja01412a040

Google Scholar

[41] "COMPLEX SALTS OF QUINOLINE, METALLIC CHLORIDES, WATER AND HYDROGEN CHLORIDE"

William M. Dehn

1926 | Journal of the American Chemical Society | DOI: 10.1021/ja01412a039

Google Scholar

[42] **"Complex Surfaces and Connected Sums of Complex Projective Planes"**

Boris Moishezon

1977 | Lecture notes in mathematics | DOI: 10.1007/bfb0063355

Google Scholar

[43] **"Simply-connected algebraic surfaces of positive index"**

Boris Moishezon, Mina Teicher

1987 | Inventiones mathematicae | DOI: 10.1007/bf01388987

Google Scholar

[44] **"Braid group technique m complex geometry, II: From arrangements of lines and conics to cuspidal curves"**

Boris Moishezon, Mina Teicher

2006 | Lecture notes in mathematics | DOI: 10.1007/bfb0086269

Google Scholar

[45] **"Braid group technique in complex geometry. I. Line arrangements in CP^2"**

Boris Moishezon, Mina Teicher

1988 | Contemporary mathematics - American Mathematical Society | DOI: 10.1090/conm/078/975093

Google Scholar

[46] **"Theory of Hall Effect in a Two-Dimensional Electron System"**

Tsuneya Ando, Yukio Matsumoto, Yasutada Uemura

1975 | Journal of the Physical Society of Japan | DOI: 10.1143/jpsj.39.279

Google Scholar

[47] **"LEFSCHETZ FIBRATIONS OF GENUS TWO - A TOPOLOGICAL APPROACH"**

Yukio Matsumoto

1996 | Topology and Teichmüller Spaces | DOI: 10.1142/9789814503921_0008

Google Scholar

[48] **"Transverse Magneto-Conductivity of a Two-Dimensional Electron Gas"**

Tsuneya Ando, Yukio Matsumoto, Yasutada Uemura, Mineo Kobayashi, Kiichi F. Komatsubara

1972 | Journal of the Physical Society of Japan | DOI: 10.1143/jpsj.32.859

Google Scholar

[49] "Collapsing of Riemannian manifolds and eigenvalues of Laplace operator"

Kenji Fukaya

1987 | Inventiones mathematicae | DOI: 10.1007/bf01389241

Google Scholar

[50] "Nilpotent structures and invariant metrics on collapsed manifolds"

Jeff Cheeger, Kenji Fukaya, Mikhael Gromov

1992 | Journal of the American Mathematical Society | DOI: 10.1090/s0894-0347-1992-1126118-x

Google Scholar

[51] "The Fundamental Groups of Almost Nonnegatively Curved Manifolds"

Kenji Fukaya, Takao Yamaguchi

1992 | Annals of Mathematics | DOI: 10.2307/2946606

Google Scholar

[52] "Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds I"

Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta, Kaoru Ono

2008 | Institutional Repositories DataBase (IRDB)

Google Scholar

[53] "Theory of Complex Functions"

Reinhold Remmert

1991 | Graduate texts in mathematics | DOI: 10.1007/978-1-4612-0939-3

Google Scholar

[54] "Theory of Stein Spaces"

Hans Grauert, Reinhold Remmert

2004 | Classics in mathematics | DOI: 10.1007/978-3-642-18921-0

Google Scholar

[55] "Non-Archimedean Analysis: A Systematic Approach to Rigid Analytic Geometry"

Ulrich Güntzer, Reinhold Remmert, Siegfried Bosch

1984 | Medical Entomology and Zoology

Google Scholar

[56] "Classical Topics in Complex Function Theory"

Reinhold Remmert

1998 | Graduate texts in mathematics | DOI: 10.1007/978-1-4757-2956-6

Google Scholar

[57] **"Foundations of Constructive Analysis."**
Abraham Robinson, Errett Bishop
1968 | American Mathematical Monthly | DOI: 10.2307/2314383
Google Scholar

[58] **"A proof that every Banach space is subreflexive"**
Errett Bishop, R. R. Phelps
1961 | Bulletin of the American Mathematical Society | DOI: 10.1090/s0002-9904-1961-10514-4
Google Scholar

[59] **"Differentiable manifolds in complex Euclidean space"**
Errett Bishop
1965 | Duke Mathematical Journal | DOI: 10.1215/s0012-7094-65-03201-1
Google Scholar

[60] **"A minimal boundary for function algebras"**
Errett Bishop
1959 | Pacific Journal of Mathematics | DOI: 10.2140/pjm.1959.9.629
Google Scholar

[61] **"Introduction to the Theory of Analytic Spaces"**
Raghavan Narasimhan
1966 | Lecture notes in mathematics | DOI: 10.1007/bfb0077071
Google Scholar

[62] **"The Levi problem for complex spaces"**
Raghavan Narasimhan
1961 | Mathematische Annalen | DOI: 10.1007/bf01451029
Google Scholar

[63] **"The Levi problem on complex spaces with singularities"**
John Erik Fornæss, Raghavan Narasimhan
1980 | Mathematische Annalen | DOI: 10.1007/bf01349254
Google Scholar

[64] **"Imbedding of Holomorphically Complete Complex Spaces"**
Raghavan Narasimhan
1960 | American Journal of Mathematics | DOI: 10.2307/2372949
Google Scholar

[65] **"On Levi's Problem and the Imbedding of Real-Analytic Manifolds"**

Hans Grauert

1958 | Annals of Mathematics | DOI: 10.2307/1970257

Google Scholar

[66] **"Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes"**

Aldo Andreotti, Hans Grauert

1962 | Bulletin de la Société mathématique de France | DOI: 10.24033/bsmf.1581

Google Scholar

[67] **"From Holomorphic Functions to Complex Manifolds"**

Steven G. Krantz, K Fritzsche, Hans Grauert

2003 | American Mathematical Monthly | DOI: 10.2307/3647794

Google Scholar

[68] **"Abstraction-Based Parameter Synthesis for Multiaffine Systems"**

Sergiy Bogomolov, Christian Schilling, Ezio Bartocci, Grégory Batt, Hui Kong

2015 | Lecture notes in computer science | DOI: 10.1007/978-3-319-26287-1_2

Google Scholar

[69] **"Planning as model checking in hybrid domains"**

Sergiy Bogomolov, Daniele Magazzeni, Andreas Podelski, Martin Wehrle

2014 | edoc (University of Basel) | DOI: 10.5555/2892753.2892861

Google Scholar

[70] **"Guided search for hybrid systems based on coarse-grained space abstractions"**

Sergiy Bogomolov, Alexandre Donzé, Goran Frehse, Radu Grosu, Taylor Thomas Johnson

2015 | International Journal on Software Tools for Technology Transfer | DOI: 10.1007/s10009-015-0393-y

Google Scholar

[71] **"Hybrid automata: from verification to implementation"**

Stanley Bak, Omar Ali Beg, Sergiy Bogomolov, Taylor Thomas Johnson, Luan Viet Nguyen

2017 | International Journal on Software Tools for Technology Transfer | DOI: 10.1007/s10009-017-0458-1

Google Scholar

[72] **"Sur le contact des courbes et des surfaces"**

G. Darboux

French digital mathematics library (Numdam)

Google Scholar

[73] **"Sur les théorèmes d'Ivory relatifs aux surfaces homofocales du second degré"**

G. Darboux

1872 | e-rara.ch | DOI: 10.3931/e-rara-18755

Google Scholar

[74] **"Some Global Properties of Contact Structures"**

John W. Gray

1959 | The Annals of Mathematics | DOI: 10.2307/1970192

Google Scholar

[75] **"Second ARRB workshop on quality control, Department of Main Roads, New South Wales, July 1980; proceedings"**

W. Gray

1981

Google Scholar

[76] **"Compactness results in Symplectic Field Theory"**

Frédéric Bourgeois, Yakov Eliashberg, Helmut Hofer, Kris Wysocki, Eduard Zehnder

2003 | Geometry & Topology | DOI: 10.2140/gt.2003.7.799

Google Scholar

[77] **"TOPOLOGICAL CHARACTERIZATION OF STEIN MANIFOLDS OF DIMENSION >2"**

Yakov Eliashberg

1990 | International Journal of Mathematics | DOI: 10.1142/s0129167x90000034

Google Scholar

[78] **"Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet's work"**

Yakov Eliashberg

1992 | Annales de l'institut Fourier | DOI: 10.5802/aif.1288

Google Scholar

[79] "Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds"

Yakov Eliashberg

1989 | Inventiones mathematicae | DOI: 10.1007/bf01393840

Google Scholar

[80] "Three-Dimensional Geometry and Topology"

William P.HG Thurston, Silvio V. F. Levy

1997 | CERN Document Server (European Organization for Nuclear Research)

Google Scholar

[81] "Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry"

William P.HG Thurston

1982 | Bulletin of the American Mathematical Society | DOI: 10.1090/s0273-0979-1982-15003-0

Google Scholar

[82] "The geometry and topology of three-manifolds"

William P.HG Thurston

1979 | Princeton University eBooks

Google Scholar

[83] "On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces"

William P.HG Thurston

1988 | Bulletin of the American Mathematical Society | DOI: 10.1090/s0273-0979-1988-15685-6

Google Scholar

[84] "A unified model of coupled arc plasma and weld pool for double electrodes TIG welding"

Xinxin Wang, Ding Fan, Jiankang Huang, Yong Huang

2014 | Journal of Physics D Applied Physics | DOI: 10.1088/0022-3727/47/27/275202

Google Scholar

[85] "Investigation of heat transfer and fluid flow in high current GTA welding by a unified model"

Xinxin Wang, Yi Luo, Ding Fan

2019 | International Journal of Thermal Sciences | DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2019.04.005

Google Scholar

[86] "A Legendrian surgery presentation of contact 3-manifolds"

FAN DING, HANSJÖRG GEIGES

2004 | Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society | DOI: 10.1017/s0305004103007412

Google Scholar

[87] "Géométrie de contact: de la dimension trois vers les dimensions supérieures"

Emmanuel Giroux

2003 | HAL (Le Centre pour la Communication Scientifique Directe) | DOI: 10.48550/arxiv.math/0305129

Google Scholar

[88] "Convexité en topologie de contact"

Emmanuel Giroux

1991 | Commentarii Mathematici Helvetici | DOI: 10.1007/bf02566670

Google Scholar

[89] "Structures de contact en dimension trois et bifurcations des feuilletages de surfaces"

Emmanuel Giroux

1999 | HAL (Le Centre pour la Communication Scientifique Directe)

Google Scholar

[90] "Une structure de contact, même tendue, est plus ou moins tordue"

Emmanuel Giroux

1994 | Annales Scientifiques de l École Normale Supérieure | DOI: 10.24033/asens.1704

Google Scholar

Artykuły pokrewne (Google Scholar):

[91] "Elliptic Surfaces and Lefschetz Fibrations"

Naohiko Kasuya

2025 | SpringerBriefs in Mathematics | DOI: 10.1007/978-981-96-3002-8_3

Google Scholar

[92] "CR regular embeddings of S^{4n-1} in $\mathbb{C}^{2n+1}$"

Naohiko Kasuya

2020 | Proceedings of the American Mathematical Society | DOI: 10.1090/proc/14962

Google Scholar

[93] "Non-Kähler Complex Structures on $$\mathbb {R}^{2n}$$"

Naohiko Kasuya

2025 | SpringerBriefs in Mathematics | DOI: 10.1007/978-981-96-3002-8_4

Google Scholar

[94] "Strongly Pseudoconcave Surfaces and Their Boundaries"

Naohiko Kasuya

2025 | SpringerBriefs in Mathematics | DOI: 10.1007/978-981-96-3002-8_7

Google Scholar

[95] "Strongly Pseudoconvex Manifolds"

Naohiko Kasuya

2025 | SpringerBriefs in Mathematics | DOI: 10.1007/978-981-96-3002-8_5

Google Scholar

[96] "Preliminaries"

Naohiko Kasuya

2025 | SpringerBriefs in Mathematics | DOI: 10.1007/978-981-96-3002-8_1

Google Scholar

[97] "The Canonical Contact Structure on the Link of a Cusp Singularity"

Naohiko Kasuya

2014 | Tokyo Journal of Mathematics | DOI: 10.3836/tjm/1406552427

Google Scholar

[98] "An obstruction for codimension two contact embeddings in the odd dimensional Euclidean spaces"

Naohiko Kasuya

2016 | Journal of the Mathematical Society of Japan | DOI: 10.2969/jmsj/06820737

Google Scholar

[99] "Non-Kähler complex structures on $\mathbb{R}4$"

Antonio J. Di Scala, Naohiko Kasuya, Daniele Zuddas

2017 | Geometry & Topology | DOI: 10.2140/gt.2017.21.2461

Google Scholar

[100] "On embeddings of almost complex manifolds in almost complex Euclidean spaces"

Antonio J. Di Scala, Naohiko Kasuya, Daniele Zuddas

2015 | Journal of Geometry and Physics | DOI: 10.1016/j.geomphys.2015.11.008

Google Scholar

[101] "On contact embeddings of contact manifolds in the odd dimensional Euclidean spaces"

Naohiko Kasuya

2015 | International Journal of Mathematics | DOI: 10.1142/s0129167x15500457

Google Scholar

[102] "A concave holomorphic filling of an overtwisted contact 3–sphere"

Naohiko Kasuya, Daniele Zuddas

2023 | Algebraic & Geometric Topology | DOI: 10.2140/agt.2023.23.2141

Google Scholar

[103] "A concave holomorphic filling of an overtwisted contact 3-sphere"

Naohiko Kasuya, Daniele Zuddas

2017 | arXiv (Cornell University) | DOI: 10.48550/arxiv.1711.07429

Google Scholar

[104] "Compact Complex Surfaces"

Naohiko Kasuya

2025 | SpringerBriefs in mathematics | DOI: 10.1007/978-981-96-3002-8_2

Google Scholar

[105] "Erratum: Generic immersions and totally real embeddings"

Naohiko Kasuya, Masamichi Takase

2019 | International Journal of Mathematics | DOI: 10.1142/s0129167x19920034

Google Scholar

[106] "The contact structure on the link of a cusp singularity"

Naohiko Kasuya

2012 | arXiv (Cornell University) | DOI: 10.48550/arxiv.1202.2198

Google Scholar

Treść tworzy Fundacja Dobre Państwo.
Redaguje i publikuje APA ONE, autorski system redakcyjny Fundacji oparty na AI.
APA ONE Publishing System
Fundacja Dobre Państwo © 2026
Article ID: b1cb67ee-8ef1-4d8b-9476-6988612ba2fa