Matematyka demokracji: między teorią wyboru a praktyką

AUTOR

Fundacja Dobre Państwo

STRESZCZENIE / ABSTRACT

Artykuł stanowi głęboką analizę styku matematyki i politologii, koncentrując się na teorii wyboru społecznego. Autor wyjaśnia, dlaczego idealny system wyborczy jest matematycznie niemożliwy, przywołując fundamentalne twierdzenia Arrowa, Maya i Condorceta. Tekst szczegółowo omawia mechanizmy manipulacji systemowej, takie jak głosowanie strategiczne czy gerrymandering, oraz narzędzia mierzące sprawiedliwość wyborczą, m.in. wskaźnik Gallaghera. Czytelnik pozna również zaawansowane modele inżynierii instytucjonalnej, w tym prawo pierwiastkowe Penrose'a oraz polską propozycję reformy systemu głosowania w UE – Kompromis Jagielloński. To kompendium wiedzy o tym, jak algorytmy i reguły przeliczania głosów realnie wpływają na podział władzy i stabilność państwa.

This article provides an in-depth analysis of the intersection of mathematics and political science, focusing on social choice theory. The author explains why an ideal electoral system is mathematically impossible, citing the fundamental theorems of Arrow, May, and Condorcet. The text provides a detailed discussion of systemic manipulation mechanisms, such as strategic voting and gerrymandering, and tools for measuring electoral fairness, including the Gallagher index. The reader will also learn about advanced models of institutional engineering, including Penrose's square root law and the Polish proposal for reforming the EU voting system—the Jagiellonian Compromise. This is a compendium of knowledge on how algorithms and vote counting rules actually impact the division of power and state stability.

Gdy spojrzymy na te twierdzenia całościowo, zarysowują się trzy wielkie osie sporu. Pierwsza to oś spójności, gdzie Kenneth Arrow i markiz de Condorcet dowodzą, jak krucha jest pełna racjonalność, gdy próbujemy agregować indywidualne rankingi w spójną wolę większości. Druga to oś strategii: twierdzenia Gibbarda–Satterthwaite'a oraz Duggana–Schwartza ujawniają nieuchronność manipulacji, gdy tylko agenda polityczna staje się pluralistyczna. Trzecia, oś

instytucji, przypomina nam dzięki McKelveyowi i Schofieldowi, że nawet przy najszlachetniejszych preferencjach wynik zależy od architektury procesu, a Amartya Sen dodaje, że nawet spójny werdykt może okazać się nieliberalny, jeśli nie osłonimy go fundamentalnymi prawami. W tym pejzażu niemożliwości jedyny pozytywny punkt stały oferuje Kenneth May – przy dwóch alternatywach reguła większości jest nie tylko intuicyjna, ale i aksjomatycznie najlepsza. To zresztą tłumaczy fenomen pytań referendalnych typu „tak/nie", w których binarność wyboru minimalizuje chaos i strategiczną nieprzewidywalność. Na marginesie tej teoretycznej mapy warto odnotować empiryczne prawo Duvergera. Choć nie jest to twierdzenie w sensie czysto matematycznym, narzuca ono rygor politycznej praktyce. Owszem, nie należy go rozumieć jako prawa deterministycznego, lecz jego trafność jest uderzająca: ordynacje większościowe w okręgach jednomandatowych sprzyjają dwubiegunowej scenie partyjnej, podczas gdy systemy proporcjonalne podtrzymują jej pluralizm. Związek między regułą liczenia głosów a strukturą rywalizacji nie jest więc logiczną...

SŁOWA KLUCZOWE

matematyka demokracji | teoria wyboru społecznego | głosowanie strategiczne | twierdzenie Arrowa | prawo Duvergera | wskaźnik Gallaghera | gerrymandering | Kompromis Jagielloński | prawo pierwiastkowe Penrose'a | odporność na manipulację | metoda d'Hondta | próg naturalny | twierdzenie McKelveya | siła głosu | paradoks Condorceta

Efektywność vs. sprawiedliwość: osie wyboru społecznego

oniecznością, lecz silną regularnością, która pulsuje w danych z całego świata.

Jest w tej wiedzy również nutka dydaktyczna, którą lubię wykładać na stół bez ogródek. Gdy ktoś z optymizmem rzuca, że „wystarczy zrobić uczciwą ordynację", teoretyk wyboru społecznego odpowie z lekkim humorem: „Oczywiście, ale którą dokładnie własność uczciwości masz na myśli i z której w zamian rezygnujesz?". Jak pisał José Ortega y Gasset, „Zdrowie demokracji, bez względu na jej rodzaj i zakres, zależy od procedury wyborczej. Wszystko inne jest drugorzędne". Ta fraza nie jest retorycznym ornamentem; to esencja tego, co nazywamy matematyką demokracji.

Aby uporządkować dalsze rozważania, potrzebujemy dwóch krótkich definicji. Głosowanie strategiczne to świadome oddanie głosu niezgodnego z prawdziwą preferencją, lecz optymalnego z perspektywy oczekiwanego wyniku; większość sensownych systemów wyborczych stwarza sytuacje, w których taka kalkulacja się opłaca. Z kolei odporność na manipulację (strategy-proofness) to własność reguły, przy której taktyczne głosowanie nigdy nie przynosi zysku. Twierdzenia Gibbarda–Satterthwaite'a i Duggana–Schwartza mówią nam wprost, że w warunkach pluralizmu nie osiągniemy tej odporności bez wyrzeczeń, które byłyby nie do zaakceptowania z perspektywy proceduralnej równości. Celem projektanta ordynacji nie jest więc naiwne „wyeliminowanie manipulacji", lecz raczej „zarządzanie bodźcami" w taki sposób, aby taktyczne zachowania nie demolowały proporcjonalności, reprezentatywności ani legitymizacji władzy.

Dla pełnego obrazu zestroimy raz jeszcze kluczowe akcenty. Arrow uczy, że spójność i niezależność od nieistotnych alternatyw nie mogą mieszkać razem, gdy opcji jest wiele. May pokazuje, że przy dwóch wyborach większość jest nie tylko popularna, ale i jedyna „aksjomatycznie dobra". Condorcet ostrzega, że racjonalność większości to zupełnie inna historia w

Głosowanie strategiczne: bariera dla manipulacji

Zacznijmy od dwóch definicji, które wyznaczają ramy całej dyskusji o „manipulacji" wynikiem wyborczym. Pierwszą jest głosowanie strategiczne, czyli akt oddania głosu niezgodnie z własną preferencją, lecz w sposób optymalny względem przewidywanego rezultatu. Większość racjonalnych systemów wyborczych dopuszcza sytuacje, w których taka kalkulacja po prostu się opłaca. Drugim pojęciem jest odporność na manipulację (strategy-proofness) – teoretyczna własność reguły, przy której taktyczne głosowanie nigdy nie przynosi zysku. Niestety, twierdzenia Gibbarda–Satterthwaite'a i Duggana–Schwartza dowodzą, że w warunkach pluralistycznych nie osiągniemy tego ideału bez poświęceń nie do zaakceptowania z perspektywy równości procedury.

To matematyczne ograniczenie fundamentalnie zmienia cel projektanta ordynacji. Nie jest nim już naiwne „wyeliminowanie manipulacji", lecz znacznie bardziej subtelne zadanie: „zarządzanie bodźcami". Chodzi o taką konstrukcję reguł, aby nieuniknione zachowania taktyczne nie naruszały proporcjonalności, nie niszczyły reprezentatywności ani nie podważały legitymacji demokratycznych decyzji. To właśnie o tę sztukę poruszania się w ich cieniu będziemy toczyć spór w częściach poświęconych praktycznym implikacjom.

Twierdzenie Arrowa: matematyczny kres spójności wyborczej

Na marginesie tej mapy niemożliwości warto odnotować empiryczne prawo Duvergera. Choć nie jest to twierdzenie w sensie matematycznym, narzuca ono praktyce żelazną dyscyplinę. Nie należy go rozumieć jako prawa deterministycznego, ale jako regułę o potężnej sile predykcyjnej: ordynacje większościowe w okręgach jednomandatowych sprzyjają dwubiegunowej scenie partyjnej, podczas gdy systemy proporcjonalne podtrzymują jej pluralizm. Związek ten nie jest logiczną koniecznością, lecz jedną z najsilniejszych udokumentowanych regularności w politologii.

Jest w tej wiedzy również nutka dydaktyczna, którą lubię wykładać wprost. Gdy ktoś z zapałem mówi, że „wystarczy zrobić uczciwą ordynację", teoretyk wyboru społecznego odpowie z lekkim humorem: „Oczywiście, ale którą dokładnie własność uczciwości masz na myśli i z której w zamian rezygnujesz?". Jak pisał José Ortega y Gasset, „Zdrowie demokracji, bez względu na jej rodzaj i zakres, zależy od procedury wyborczej. Wszystko inne jest drugorzędne". Ta fraza nie jest retorycznym ornamentem; to precyzyjne streszczenie tego, co można nazwać matematyką demokracji.

Aby poruszać się dalej, potrzebujemy dwóch definicji. Głosowanie strategiczne to świadome oddanie głosu niezgodnego z naszą prawdziwą preferencją, lecz optymalnego z perspektywy oczekiwanego wyniku; większość rozsądnych systemów stwarza sytuacje, w których taka kalkulacja się opłaca. Z kolei odporność na manipulację, czyli cecha systemu, przy której taktyczne głosowanie nigdy nie przynosi korzyści, jest w praktyce nieosiągalna. Twierdzenia Gibbarda–Satterthwaite'a i Duggana–Schwartza dowodzą, że w pluralistycznych warunkach nie zdobędziemy jej bez wyrzeczeń, które byłyby nie do przyjęcia z perspektywy równości procedury. Celem projektanta ordynacji nie jest więc naiwne „wyeliminowanie manipulacji", lecz świadome zarządzanie systemem bodźców, aby taktyczne zachowania nie demolowały proporcjonalności, reprezentatywności czy legitymizacji władzy.

Dla pełnego obrazu zarysujmy raz jeszcze kluczowe akcenty tej mapy ograniczeń. Arrow pokazuje, że spójność i niezależność od nieistotnych alternatyw nie mogą mieszkać razem, gdy opcji jest wiele. May dowodzi, że przy dwóch kandydatach większość jest nie tylko popularna, ale i aksjomatycznie jedyna. Condorcet uczy, że racjonalność większości to zupełnie inna historia w modelu preferencji niż w modelu informacyjnym, stawiając przeciw sobie cykle i mądrość zbiorowości. Gibbard–Satterthwaite i Duggan–Schwartz stawiają nas przed wyborem: jeśli nie dyktatura, to manipulacja. McKelvey i Schofield ostrzegają, że bez zwycięzcy Condorceta politykę można „przegłosować" niemal w każdy róg sali, co czyni procedurę i agendę częścią wyniku. Sen przypomina, że procedura może być sprawna, lecz antyliberalna.

Jeśli zatem twierdzenia te wyznaczają granice możliwego, to praktyka projektowania ordynacji jest sztuką poruszania się w ich cieniu. Nigdy nie tworzymy ideału, lecz zawsze świadomy układ kompromisów. Aby czynić to odpowiedzialnie, trzeba nazwać instytucjonalne dźwignie, rozumieć ich skutki i umieć je mierzyć. To właśnie w tym punkcie spotykają się teoria wyboru społecznego, politologia porównawcza i inżynieria instytucji.

Wielkość okręgu determinuje liczbę partii w parlamencie

Pierwszą dźwignią jest wielkość okręgu wyborczego, czyli liczba mandatów do obsadzenia na danym terenie. Gdy wielkość ta maleje, zbliżając się do jednomandatowego ideału, logika reprezentacji nieuchronnie dryfuje w stronę większościowej zasady „zwycięzca bierze wszystko”; rośnie odsetek głosów zmarnowanych, a scena polityczna ulega konsolidacji. Gdy jednak okręg rośnie, maleje próg naturalny, co pozwala lepiej odtworzyć społeczną mozaikę i wzmacnia pluralizm, choć zarazem podnosi ryzyko rozdrobnienia sceny oraz trudności w budowie stabilnych koalicji. Ów próg naturalny to minimalny udział głosów, który jest czystym wynikiem arytmetyki; to niewidzialna bariera wynikająca z samej matematyki demokracji. W praktyce nakłada się on na znany wszystkim próg prawny, czyli klauzulę zaporową, co sprawia, że ocena systemu wyłącznie przez pryzmat ustawowej wartości bywa fundamentalnie myląca. Projektant systemu musi myśleć o obu progach łącznie, bo dopiero ich suma oddaje realną przepuszczalność sceny politycznej.

D’Hondt vs. Sainte-Laguë: premiowanie dużych graczy

Drugą dźwignią jest metoda przeliczania głosów na mandaty. Metody dzielnikowe, z d’Hondtem i Sainte-Laguë na czele, oraz formuły największych reszt, jak metoda Hare’a, to nie tylko odmienne algorytmy, lecz także konkurencyjne etosy polityczne. D’Hondt, faworyzując większych graczy, nagradza konsolidację i zwykle toruje drogę stabilnym rządom. Z kolei Sainte-Laguë, bardziej przychylna mniejszym, wierniej odwzorowuje pluralizm i chroni system przed dominacją dwóch wielkich bloków. Wybór metody jest więc fundamentalnym wyborem między sterownością a reprezentatywnością. Błędne jest zatem przekonanie, że istnieje jakakolwiek „neutralna” formuła. To, co neutralne matematycznie, nigdy nie jest neutralne politycznie.

Gerrymandering: granice okręgów jako narzędzie władzy

Piąta dźwignia to czysta geometria władzy. Gerrymandering, czyli sztuka intencjonalnego wyznaczania granic dla korzyści politycznej, potrafi w systemach większościowych przesądzić o wyniku wyborów bez zmiany choćby jednego głosu. Jego dwie klasyczne techniki – „pack and crack" – polegają na stłoczeniu wyborców przeciwnika w kilku pewnych dla niego okręgach, by następnie rozproszyć ich pozostałą część po wielu innych, gdzie ich głos traci na znaczeniu. Rozwiązaniem wydają się niezależne komisje delimitacyjne, działające na podstawie jawnych kryteriów: spójności terytorialnej, poszanowania granic naturalnych i administracyjnych czy wskaźników zwartości. Kluczowy jest też obowiązek przejrzystej dokumentacji danych źródłowych. Problem jednak nie znika w systemach proporcjonalnych. Tam gerrymandering przenosi się na wyższy poziom abstrakcji: mapę wielkości okręgów, gdyż to ona współtworzy niewidzialny próg naturalny, decydując, kto wejdzie do gry.

Kontrola agendy: kto ustala porządek, ten wygrywa

Szóstą, często lekceważoną dźwignią jest sama architektura procesu decyzyjnego: porządek obrad i reguły głosowań. Bezlitosna matematyka demokracji, a konkretnie twierdzenie McKelveya o chaosie większościowym, uczy nas bowiem, że w wielowymiarowej przestrzeni politycznej nie ma naturalnego zwycięzcy. Kto zatem kontroluje kolejność głosowań i sposób formułowania pakietów, ten w istocie rzeźbi ostateczny punkt równowagi. Dlatego konstrukcja agendy, tryb wnoszenia poprawek czy reguły pracy komisji są areną równie zażartej walki, co sam wybór ordynacji. Wszystkie te pozornie techniczne bezpieczniki – od konstruktywnego wotum nieufności, przez wymóg dwóch czytań, po odroczone vacatio legis – są próbą narzucenia porządku na ów fundamentalny chaos, by wynik był czymś więcej niż tylko arytmetyczną wypadkową chwilowych sojuszy.

Indeksy Gallaghera i Laakso-Taagepery: miary pluralizmu

Każdą z instytucjonalnych dźwigni trzeba umieć zmierzyć, inaczej spór o ordynację staje się jałową wymianą metafor. Jedną z podstawowych miar jest wskaźnik dysproporcjonalności Gallaghera (LSq), który z chirurgiczną precyzją oblicza odchylenie między udziałem głosów a udziałem mandatów. Z kolei efektywna liczba partii Laakso–Taagepery pozwala zajrzeć pod powierzchnię sceny politycznej, odróżniając system z dwoma gigantami i trzema satelitami od areny czterech równorzędnych bloków. Używa się też krzywych

głosy–mandaty, by opisać „wrażliwość” systemu na zmiany poparcia, oraz wskaźników zmarnowanych głosów. To nie są akademickie dekoracje. To jest matematyka demokracji, która pozwala przewidzieć skutki zmiany pojedynczego parametru, zanim polityczna gorączka nada mu ostateczny kształt.

Waga głosu vs. realna siła decyzyjna: matematyczna luka

Matematyczne twierdzenia o demokracji, które dotąd omawialiśmy, nabierają szczególnej ostrości w systemach dwupoziomowych. Obywatele wybierają władze państwowe, a te głosują w organizacjach międzynarodowych; udziałowcy powołują zarząd, który podejmuje decyzje w imieniu spółki. Właśnie w takich strukturach fundamentalnego znaczenia nabiera rozróżnienie między wagą głosu, czyli nominalnym udziałem, a jego siłą – realnym prawdopodobieństwem, że okaże się on decydujący.

W federacjach i organizacjach ponadnarodowych centralnym problemem jest odwieczny dylemat: jak pogodzić zasadę równości państw z zasadą równości obywateli. Jeśli każde państwo ma jeden głos, małe kraje zyskują nadreprezentację. Jeśli głosy są proporcjonalne do populacji, małe państwa tracą znaczenie, a największe zaczynają dominować. Cała historia Unii Europejskiej jest naznaczona próbami rozwiązania tej kwadratury koła. W Radzie UE, od Traktatu Nicejskiego, obowiązywał system „potrójnej większości”, wymagający zgody większości państw, większości populacji i określonej liczby głosów ważonych. Była to arytmetyka dla wtajemniczonych, uniemożliwiająca obywatelom intuicyjne zrozumienie, czy ich kraj jest „silny”, czy „słaby”.

Traktat Lizboński uprościł ten mechanizm: decyzja wymaga poparcia 55% państw reprezentujących 65% ludności UE. Pozorna prostota nie oznacza jednak sprawiedliwości. Krytycy od razu wskazali, że system ten faworyzuje największe państwa, z Niemcami na czele. Właśnie w tym kontekście narodził się Kompromis Jagielloński, propozycja Słomczyńskiego i Życzkowskiego oparta na prawie pierwiastkowym Penrose’a. Mówi ono, że siła głosu państwa powinna być proporcjonalna nie do liczby ludności, lecz do pierwiastka kwadratowego z niej. Dlaczego? Ponieważ prawdopodobieństwo, że głos pojedynczego obywatela przechyli szalę w wyborach krajowych, maleje wraz ze wzrostem populacji. Głos w dużym państwie jest więc statystycznie „słabszy”. Gdyby w Radzie UE waga głosu państwa była proporcjonalna do $\sqrt{N}$, szansa każdego obywatela na realny wpływ na decyzje Unii stałaby się mniej więcej równa. To fascynujący przykład, jak czysta matematyka może stać się narzędziem projektowania polityki.

Warto jednak pamiętać, że prawo pierwiastkowe nie usuwa problemu politycznego. Duże państwa niechętnie rezygnują z przewagi, a małe zaciekle bronią swojej nadreprezentacji. Okazuje się, że sprawiedliwość

matematyczna rzadko kiedy pokrywa się ze sprawiedliwością postrzeganą przez pryzmat interesów narodowych.

Podobne napięcie obserwujemy w świecie korporacji. Na walnych zgromadzeniach akcjonariusze głosują proporcjonalnie do liczby posiadanych akcji, jednak ich realna siła nie rośnie liniowo. Jeśli ktoś ma 49% udziałów, a reszta jest rozproszona, jego siła głosu szybuje w okolice 80%. Jeśli jednak ten sam akcjonariusz ma 20% w spółce z dwoma innymi blokami po 40%, jego wpływ może być bliski zeru. Indeksy siły głosu, takie jak wskaźnik Banzhafa czy Shapleya–Shubika, pozwalają precyzyjnie zmierzyć tę różnicę. W spółce z udziałami 49%, 26% i 25% każdy z akcjonariuszy, choć nominalnie różny, ma w praktyce taką samą siłę decyzyjną, gdyż do stworzenia większości potrzebuje tylko jednego z pozostałych. Z kolei w układzie 98%–2% mniejszościowy udziałowiec jest bezsilny, a jego akcje dają mu jedynie iluzję posiadania.

Dlatego właśnie prawo korporacyjne wprowadza mechanizmy chroniące mniejszość, takie jak wymóg większości kwalifikowanej przy kluczowych decyzjach, prawo weta czy obowiązek wykupu akcji. Większość kwalifikowana, na przykład dwie trzecie głosów, ogranicza władzę dominującego gracza i zmusza go do szukania kompromisu. Pełni więc rolę analogiczną do progów konstytucyjnych w polityce.

Zarówno w Unii Europejskiej, jak i w spółkach akcyjnych, wspólnym mianownikiem jest fundamentalna rozbieżność między wagą a siłą. Waga to nominalny klucz wpisany w prawo; siła to efektywne prawdopodobieństwo bycia języczkiem u wagi. Matematyczne indeksy pozwalają tę różnicę policzyć i projektować reguły, które ją kompensują. W systemie nicejskim Polska miała wagę 27 głosów na 345 (7,8%), ale jej realna siła według indeksu Banzhafa wynosiła 8,4%. Niemcy, z wagą 29 głosów (8,4%), miały siłę na poziomie zaledwie 7,8%. Matematyka obnażyła tu paradoks, dowodząc, że polityczne spory o „liczbę głosów” często opierają się na mylnej intuicji, a nie na chłodnym rachunku.

Kompromis Jagielloński: pierwiastkowa waga głosu w UE

W historii integracji europejskiej niewiele kwestii budziło takie emocje jak zasady głosowania w Radzie UE. Nic dziwnego – to one decydowały o realnym rozkładzie sił. W systemie nicejskim, obowiązującym w latach 2001–2014, każdy kraj dysponował określoną liczbą głosów ważonych, które tylko częściowo odzwierciedlały jego potencjał demograficzny. Na papierze wyglądało to na zrównoważony układ: Polska miała 27 głosów (7,8%), Niemcy 29 (8,4%), a Luksemburg 4 (1,2%). Nominalnie wydawało się, że Warszawa i Berlin są niemal równorzędnymi partnerami, a nawet najmniejsi gracze zachowują realny udział w procesie decyzyjnym.

Jednak pozory myliły. Gdy do analizy przystąpili politolodzy i matematycy posługujący się indeksem Banzhafa – narzędziem mierzącym prawdopodobieństwo, że głos danego kraju okaże się decydujący w budowaniu większości – obraz uległ radykalnej zmianie. Okazało się, że realna siła głosu Polski była nawet nieco wyższa niż Niemiec, podczas gdy wpływ Luksemburga, mimo formalnej wagi wynoszącej 1,2%, był bliski zeru. Wynikało to z faktu, że małe państwo w skomplikowanych koalicjach niemal nigdy nie stawało się języczkiem u wagi. Matematyka obnażyła iluzję: nominalne „małe jest piękne” w rzeczywistości oznaczało brak znaczenia.

Traktat lizboński, w pełni stosowany od 2014 roku, całkowicie zmienił ten układ. Wprowadził system podwójnej większości, w którym decyzje wymagały poparcia 55% państw reprezentujących co najmniej 65% ludności Unii. W tym modelu demografia stała się czynnikiem decydującym. Potęga Niemiec (84 mln mieszkańców) zyskała faktyczną przewagę, niezwykle trudną do zrównoważenia przez kraje średniej wielkości. Analizy Życzkowskiego i Słomczyńskiego wykazały, że siła głosu Niemiec wzrosła niemal dwukrotnie w porównaniu z systemem nicejskim, podczas gdy siła Polski spadła o kilka punktów. Było to świadome przesunięcie kompromisu: od ochrony mniejszych państw ku logice opartej na potencjale ludnościowym.

W tym kontekście pojawia się kompromis jagielloński, oparty na prawie pierwiastkowym Penrose’a. Gdyby go zastosować, waga głosu byłaby proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z liczby ludności. Niemcy miałyby więc siłę proporcjonalną do √84 mln ≈ 9160, Polska do √38 mln ≈ 6160, a Luksemburg do √0,65 mln ≈ 806. Względne proporcje wynosiłyby zatem 1 do 0,67 do 0,09. Nie jest to idealna równość państw, ale system ten maksymalizuje szansę każdego obywatela – niezależnie od kraju pochodzenia – na to, że jego głos okaże się decydujący na poziomie unijnym. W świecie matematyki demokracji jest to rozwiązanie najbliższe ideałowi sprawiedliwości jednostkowej.

Problem polega na tym, że polityka rzadko podąża za elegancją czystej geometrii. Państwa duże bronią swojej demograficznej przewagi, małe kurczowo trzymają się nadreprezentacji, a średnie, jak Polska czy Hiszpania, często czują się ściśnięte między tymi dwiema logikami. Dlatego kompromis jagielloński, choć logiczny i sprawiedliwy, pozostał raczej akademickim postulatem niż praktyką polityczną. Jego istnienie dowodzi jednak fundamentalnej prawdy: matematyka, choć bezsilna wobec politycznych interesów, potrafi dostarczyć obiektywnego punktu odniesienia – miary sprawied

Indeksy Banzhafa i Shapleya-Shubika: matematyka koalicji

Przenieśmy tę samą logikę na grunt korporacyjny, gdzie w spółkach prawa handlowego najczęściej obowiązuje zasada: jeden udział to jeden głos. Pozornie proste. Jednak podobnie jak w Unii Europejskiej, nominalna waga nie oznacza realnej siły decyzyjnej. Indeksy siły głosu, takie jak wskaźnik Banzhafa czy Shapleya–Shubika, stają się tu narzędziami analitycznymi, które pozwalają z chirurgiczną precyzją obliczyć, kto naprawdę kontroluje bieg spraw.

Rozważmy spółkę z trzema udziałowcami o udziałach 49%, 26% i 25%. Intuicja podpowiada, że akcjonariusz z pakietem 49% niemal w pełni dominuje. Matematyka demaskuje jednak tę iluzję. Aby przegłosować uchwałę wymagającą większości 51%, potrzeba koalicji dwóch udziałowców. Możliwe są trzy zwycięskie sojusze: (49+26), (49+25) oraz (26+25). Prosta analiza pokazuje, że każdy z udziałowców jest niezbędnym elementem w dokładnie dwóch z trzech możliwych koalicji. Wniosek jest paradoksalny: mimo drastycznych różnic w udziałach, realna siła głosu każdego z nich wynosi dokładnie 1/3. To klasyczny przykład złudzenia większościowego, gdzie „prawie połowa” nie oznacza „prawie władzy absolutnej”.

Struktura 98% kontra 2% stanowi lustrzane odbicie poprzedniego przykładu. Teoretycznie mniejszościowy akcjonariusz posiada 2% udziałów, lecz w praktyce jego głos jest bez znaczenia. Żadna decyzja nie może zostać podjęta bez zgody udziałowca większościowego, toteż ten mniejszościowy nigdy nie staje się graczem rozstrzygającym. Jego realna siła, mierzona indeksem Banzhafa, spada do zera. Właśnie dlatego w takich układach wprowadza się instytucjonalne bezpieczniki, jak wymóg większości 75% przy zmianach statutu. Taki zapis celowo kreuje siłę tam, gdzie jej nie ma, dając posiadaczowi 2% udziałów realną władzę blokującą.

Sprawa komplikuje się w układzie 40% – 35% – 25%. Nominalnie największy udziałowiec wydaje się najpotężniejszy, ale bez wsparcia któregoś z pozostałych nie jest w stanie niczego przeforsować. Zwycięskie koalicje to (40+35), (40+25) oraz (35+25). Zauważmy, że najmniejszy udziałowiec (25%) ma aż dwie drogi do zwycięstwa, mogąc sprzymierzyć się z każdym z większych partnerów. Jego pozycja strategiczna sprawia, że realna siła bywa znacznie wyższa, niż sugerowałby jego nominalny udział. Matematyka dowodzi, że mniejszość może stać się języczkiem u wagi.

W obu tych światach – polityki unijnej i korporacyjnego ładu – kluczowa jest świadomość fundamentalnej różnicy między wagą głosu a siłą głosu. W systemach, gdzie decyzje zapadają kolegialnie, o rzeczywistym wpływie decyduje nie arytmetyka udziałów, lecz geometria możliwych koalicji. Nominalne reguły gry są zaledwie powierzchnią zjawisk; dopiero matematyczna analiza odsłania ukrytą maszynerię władzy. W polityce rodzi to paradoksy, w których duży kraj nie zawsze jest decydujący. W gospodarce zaś – sytuacje, w

których mniejszościowy inwestor staje się kluczowym graczem. Logika pozostaje niezmienna. Władza nie leży w liczbach, lecz w przestrzeni między nimi.

Wola ludu: złudzenie matematyczne i fakt proceduralny

Matematyczne twierdzenia Arrowa, Condorceta czy Gibbarda–Satterthwaite'a mają w sobie chłodną elegancję abstrakcji. Z pozoru są tylko technicznym ćwiczeniem. W istocie jednak mówią coś fundamentalnego o naturze ludzkiego współdecydowania, stając się lustrem, w którym odbija się filozoficzna prawda. Demokracja nie jest bowiem objawieniem mitycznej „woli ludu", lecz misternym konstruktem proceduralnym, utkanym z nieuniknionych kompromisów, ograniczeń i przyjętych konwencji.

Od Rousseau po współczesne slogany polityczne powraca idea „suwerenności narodu". Jednak twierdzenia wyborcze pokazują, że nie istnieje coś takiego jak jednoznaczna, przechodnia i stabilna „wola zbiorowa". Cykle Condorceta, twierdzenie Arrowa o niemożliwości czy twierdzenie McKelveya o chaosie brutalnie uświadamiają, że „lud", jako matematyczny agregat preferencji, bywa wewnętrznie sprzeczny. Mimo to w sferze symbolicznej idea „woli ludu" pozostaje niezbędna — jako mit, który legitymizuje instytucje. Jak zauważył antropolog Clifford Geertz, mity polityczne nie są opisami rzeczywistości, lecz matrycami do jej interpretacji. Pozwalają wierzyć, że decyzje proceduralne ucieleśniają coś więcej niż tylko suchą mechanikę głosowań. Bez tego mitu instytucje nie budzą lojalności.

Twierdzenie Arrowa można zatem czytać nie tylko jako dowód matematycznej niemożliwości, lecz także jako filozoficzną lekcję. Uczy ona, że ideały społeczne są wobec siebie konkurencyjne, a nie harmonijne. Przejrzystość, równość, odporność na manipulację, wolność jednostki — wszystkich tych wartości nie da się w pełni pogodzić w jednym systemie. Demokracja nie jest więc dążeniem do doskonałego ładu, lecz praktyką ciągłego „ważenia wartości". John Rawls pisał, że sprawiedliwość nie oznacza braku konfliktu, lecz istnienie reguł, które czynią go znośnym. Matematyka wyborów jest tu narzędziem demaskującym, które przypomina, że każdy kompromis ma swoją cenę, a iluzja „systemu idealnego" jest niebezpiecznym uproszczeniem.

Algorytmy: nowa technokratyczna bariera wyboru

Z perspektywy psychologii poznawczej twierdzenia o niemożliwości brzmią jak echo znajomych odkryć. Daniel Kahneman i Amos Tversky dowiedli, że ludzki umysł nie jest doskonałym kalkulatorem, lecz ulega licznym błędom poznawczym i heurystykom, takim jak efekt zakotwiczenia czy awersja do straty. Skoro pojedynczy człowiek nie jest w pełni racjonalny, dlaczego mielibyśmy oczekiwać, że zbiorowość będzie działać z precyzją arytmetycznego wzoru? To, co dla matematyka jest paradoksem Condorceta, dla

psychologa staje się lustrzanym odbiciem dysonansu poznawczego – sytuacji, w której spójne wewnętrznie przekonania jednostek tworzą na poziomie grupy obraz pełen sprzeczności. Demokracja jawi się tu jako proces podobny do pracy umysłu: nieracjonalny w szczegółach, lecz zaskakująco zdolny do wyłaniania „racjonalności funkcjonalnej" na poziomie całości.

Te matematyczne prawidła rezonują daleko poza salami do głosowania, odbijając się echem w prawie, ekonomii i socjologii. W prawie publicznym teoria wyboru społecznego rzuca nowe światło na architekturę państwa. Konstytucja nie jest bowiem zbiorem wzniosłych norm, lecz twardym algorytmem decyzyjnym. Musi rozstrzygnąć odwieczny dylemat: czy chronić jednostkę przed tyranią większości, czy ułatwić większości sprawne rządzenie; czy wspierać pluralizm kosztem stabilności, czy wzmacniać stabilność kosztem różnorodności. Każda zmiana ordynacji wyborczej to w istocie minikonstytucja, która na nowo definiuje logikę legitymizacji władzy.

W ekonomii twierdzenia te uderzają w samo serce teorii mechanizmów. Twierdzenie Gibbarda–Satterthwaite'a przypomina, że żadna aukcja czy procedura negocjacyjna nie jest w pełni odporna na strategiczną manipulację. Z kolei Arrow uczy, że tak zwana funkcja dobrobytu społecznego to zawsze konstrukcja polityczna, a nie neutralny wynik bezstronnego rachunku. Teoria gier dodaje do tego obrazu kluczowy element: koalicje. Głosowanie przestaje być aktem sumowania indywidualnych woli, a staje się dynamiczną areną handlu, kompromisu i budowania sojuszy.

W socjologii zaś matematyczne twierdzenia spotykają się z teorią legitymizacji Maxa Webera. Władza, pisał Weber, potrzebuje oparcia w tradycji, charyzmie lub prawie. Systemy wyborcze działają w tej trzeciej, legalno-racjonalnej sferze, lecz nie mogą obyć się bez elementu symbolicznego. Sama arytmetyka nie buduje zaufania, ale jej niezrozumiałość może je zniszczyć. Gdy wyborcy gubią się w zawiłościach reguł, rodzi się poczucie „oszustwa" – emocjonalna reakcja, która istnieje niezależnie od faktycznej uczciwości systemu.

W XXI wieku ta abstrakcyjna teoria zyskuje nieoczekiwanie konkretny wymiar. Algorytmy rekomendacji w mediach społecznościowych, mechanizmy głosowania na platformach internetowych czy systemy ocen w ekonomii współdzielenia – wszystkie te systemy muszą agregować preferencje i wszystkie wpadają w te same pułapki. Paradoks Condorceta staje się błędem systemowym w silniku rekomendacji. Podatność na manipulację, którą opisuje twierdzenie Gibbarda–Satterthwaite'a, materializuje się w postaci zalewu fałszywych recenzji. Okazuje się, że demokracja to nie tylko domena parlamentów, ale uniwersalny model podejmowania decyzji w cyfrowych wspólnotach. A sam Arrow staje się nie tyle teoretykiem państwa, ile patronem całej epoki algorytmicznego zarządzania.

Na koniec pozostaje refleksja natury etycznej. Ta cała matematyka demokracji uczy nas przede wszystkim pokory. Nie ma instytuc

Ordynacja sprawiedliwa: trzy minimalne warunki instytucji

W tym miejscu z całą mocą powraca intuicja, którą filozofia polityczna pielęgnuje od dawna. „Sprawiedliwość jest pierwszą cnotą instytucji społecznych” – przypomina John Rawls w klasycznym otwarciu swojego dzieła. Jeśli ordynacja wyborcza ma być sprawiedliwa, musi spełnić trzy minimalne warunki: być przewidywalna w działaniu, weryfikowalna w swoim wyniku oraz komunikowalna w języku, w którym obywatele potrafią wyrazić jej sens. Wszystko inne, w tym nasze preferencje dotyczące określonej mieszanki stabilności i pluralizmu, jest już polityką w jej najszlachetniejszym wydaniu – sztuką możliwego, uprawianą w ramach nieprzekraczalnych granic, jakie wyznacza matematyka demokracji.

> Nie ma instytucW tym miejscu z całą mocą powraca intuicja, którą filozofia polityczna pielęgnuje od dawna. „Sprawiedliwość jest pierwszą cnotą instytucji społecznych” – przypomina John Rawls w klasycznym otwarciu swojego dzieła. Jeśli ordynacja wyborcza ma być sprawiedliwa, musi spełnić trzy minimalne warunki: być przewidywalna w działaniu, weryfikowalna w swoim wyniku oraz komunikowalna w języku, w którym obywatele potrafią wyrazić jej sens. Wszystko inne, w tym nasze preferencje dotyczące określonej mieszanki stabilności i pluralizmu, jest już polityką w jej najszlachetniejszym wydaniu – sztuką możliwego, uprawianą w ramach nieprzekraczalnych granic, jakie wyznacza matematyka demokracji.

Inspiracje

[1] **"Każdy głos się liczy! Wędrówka przez krainę wyborów"** K. Rzążewski, W. Słomczyński, K. Życzkowski

Kazimierz Rzążewski jest polskim fizykiem i profesorem specjalizującym się w optyce kwantowej i ultrazimnych gazach kwantowych. Znany jest z prac nad kondensatami Bosego-Einsteina i magnetostrykcją w ultrazimnych gazach. W 2015 roku został laureatem Nagrody Fundacji na rzecz Nauki Polskiej.

Kazimierz Rzążewski is a Polish physicist and professor specializing in quantum optics and ultracold quantum gases. He is known for his work on Bose-Einstein condensates and magnetostriction in ultracold gases. He was awarded the Foundation for Polish Science Prize in 2015.

Center for Theoretical Physics, Polish Academy of Sciences

Wojciech Słomczyński jest polskim matematykiem specjalizującym się w układach dynamicznych, chaosie, entropii, fraktalach oraz zastosowaniach matematyki w fizyce kwantowej i teorii wyboru społecznego. Jest profesorem Uniwersytetu Jagiellońskiego.

Wojciech Słomczyński is a Polish mathematician specializing in dynamical systems, chaos, entropy, fractals, and applications of mathematics in quantum physics and social choice theory. He is a professor at Jagiellonian University.

Jagiellonian University

Karol Życzkowski jest polskim fizykiem i matematykiem. Jest profesorem Uniwersytetu Jagiellońskiego i Centrum Fizyki Teoretycznej Polskiej Akademii Nauk. Jego badania obejmują chaos kwantowy, pomiary kwantowe i informację kwantową.

Karol Życzkowski is a Polish physicist and mathematician. He is a professor at Jagiellonian University & the Center for Theoretical Physics of the Polish Academy of Sciences. His research includes quantum chaos, quantum measurement, and quantum information.

Jagiellonian University / Center for Theoretical Physics of the Polish Academy of Sciences

Literatura uzupełniająca

Książki

Autorzy przywoływani w artykule:

[1] "Super-Intense Laser-Atom Physics"

Kazimierz Rzążewski

Springer

[2] "Dynamical Entropy, Markov Operators, and Iterated Function Systems"

W. Słomczyński

2004 | Wydawnictwo UJ

[3] "Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement"

Ingemar Bengtsson, K. Życzkowski

2017 | Cambridge University Press

Literatura pokrewna (Google Scholar):

[4] **"Sketch for a Historical Picture of the Progress of the Human Mind"**

Marquis De Condorcet

1795 | Published posthumously by his wife

[5] **"Essay on the Application of Analysis to the Probability of Majority Decisions"**

Marquis De Condorcet

1785

[6] **"Wise Choices, Apt Feelings: A Theory of Normative Judgment"**

Allan Gibbard

1990 | Harvard University Press

Google Scholar

[7] **"Social Choice and Strategic Decisions: Essays in Honor of Jeffrey S. Banks"**

John Duggan

2005

[9] **"Positive Changes in Political Science: The Legacy of Richard D. McKelvey's Most Influential Writings"**

James E. Alt, John H. Aldrich, Arthur Lupia

2007 | University of Michigan Press

Google Scholar

[10] **"Advances in the Spatial Theory of Voting"**

Richard D. McKelvey, James M. Enelow, Melvin J. Hinich, Peter C. Ordeshook

2012 | Cambridge University Press

Google Scholar

[11] **"Collective Choice and Social Welfare"**

Amartya Sen

1970 | Holden-Day

[12] **"The Arrow Impossibility Theorem"**

Amartya Sen, Eric Maskin, Kenneth Arrow, Joseph Stiglitz, Partha Dasgupta

2014 | Columbia University Press

[13] **"Bibliography and Research Manual of the History of Mathematics"**

Kenneth May

1973 | University of Toronto Press

[14] **"Meditaciones del Quijote"**

José Ortega Y Gasset

1914

[15] **"Modern Democracies: Economic Power Versus Political Power"**

Maurice Duverger

[16] **"The Revolt of the Masses"**

José Ortega Y Gasset

1929 | W. W. Norton & Company

[17] **"Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix"**

Nicolas De Condorcet

1785 | De l'imprimerie Royale

Google Scholar

[18] **"Outlines of an Historical View of the Progress of the Human Mind"**

Nicolas De Condorcet

1795 | Printed for J. Johnson

Google Scholar

Artykuły naukowe

Autorzy przywoływani:

[1] **"The Economic Implications of Learning by Doing"**

Kenneth J. Arrow

1962 | The Review of Economic Studies

[2] **"Duverger and the territory: explaining deviations from the two-party-competition-law"**

Thomas Bräuninger, Niklas Potrafke

2019 | Electoral Studies

Google Scholar

[3] **"Sur l'admission des femmes au droit de cité"**

Marquis De Condorcet

1790

[4] **"Strategy-Proofness and Arrow's Conditions: Existence and Correspondence Theorems for Voting Procedures and Social Welfare Functions"**

Mark Satterthwaite

1975 | Journal of Economic Theory

[5] **"Price Discovery Using a Double Auction"**

Mark A. Satterthwaite, Steven R. Williams, Konstantinos E. Zachariadis

2021 | Games and Economic Behavior

[6] **"Arrow’s theorem, ultrafilters, and reverse mathematics"**

Damiano Mazza, Giulio Guerrieri

2023 | arXiv

Google Scholar

[7] **"Strategic Manipulability without Resoluteness or Shared Beliefs: Gibbard-Satterthwaite Generalized"**

J. Duggan, T. Schwartz

2000 | Social Choice and Welfare

[8] **"A Bayesian model of voting in juries"**

J Duggan, C Martinelli

2001 | Games and Economic Behavior

[9] **"Two statements of the Duggan-Schwartz theorem"**

Egor Ianovski

2016 | arXiv.org

Google Scholar

[10] **"A theory of voting in large elections"**

Richard D. McKelvey, John W. Patty

2006 | Games and Economic Behavior

Google Scholar

[11] **"Evaluating Fairness of Voting Systems: Simulating Violations of Arrow's Conditions"**

Virochan Pandit, Joseph Cutrone

2025

Google Scholar

[12] **"The Possibility of Social Choice"**

Amartya Sen

1999 | American Economic Review

[13] **"Equality of What?"**

Amartya Sen

1980

[14] **"The Elementary Statistics of Majority Voting"**

Lionel Penrose

1946 | Journal of the Royal Statistical Society

[15] **"Voting in the European Union: The square root system of Penrose and a critical point"**

Wojciech Słomczyński, Karol Życzkowski

2006 | arXiv

Google Scholar

[16] **"Sur les méthodes de répartition proportionnelle"**

André Sainte-Laguë

1910 | Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences

[17] **"Electoral Systems and Their Consequences: Mixed Electoral Systems and Their Political Impact"**

Robert Golder, Staffan Kumlin

2019 | Annual Review of Political Science

Google Scholar

[18] **"Comparing Proportional Representation Electoral Systems: Quotas, Thresholds, Paradoxes and Majorities"**

Michael Gallagher

2009 | British Journal of Political Science

[19] **""Effective" number of parties: a measure with application to West Europe"**

Markku Laakso, Rein Taagepera

1979 | Comparative Political Studies

Google Scholar

[20] **"Parsimonious model for predicting mean cabinet duration on the basis of electoral system"**

Rein Taagepera, Allan Sikk

2010 | Party Politics

[21] **"Arrow's Impossibility Theorem as a Generalisation of Condorcet's Paradox"**

Ori Livson, other authors

2025 | arXiv

Google Scholar

[22] **"An Exploration of the Application of the Banzhaf Power Index to Weighted Voting Systems"**

Elise Buckley

2010 | Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal

Google Scholar

[23] **"Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases"**

Daniel Kahneman, Paul Slovic, Amos Tversky

1974 | Science

Google Scholar

[24] **"Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk"**

Daniel Kahneman, Amos Tversky

1979 | Econometrica

Google Scholar

[25] **"Politics as a Vocation"**

Max Weber

1919

[26] **"Science as a Vocation"**

Max Weber

1919

[27] **"The Propensity Interpretation of Probability"**

Karl Popper

1959

[28] **"Towards a Rational Theory of Tradition"**

Karl Popper

1949 | The Rationalist Annual

[29] **"Justice as Fairness"**

John Rawls

[30] **"Arrow's theorem, ultrafilters, and reverse mathematics"**

Sam Sanders, Andreas Weiermann

2023 | arXiv

Google Scholar

[31] **"Widespread partisan gerrymandering mostly cancels nationally, but reduces electoral competition"**

Christopher T. Kenny, Cory McCartan, Tyler Simko, Kosuke Imai

2023 | PNAS

Google Scholar

[32] **"Manipulation of Voting Schemes: A General Result"**

Allan Gibbard

1973 | Econometrica

Google Scholar

[33] **"Normative Properties"**

Allan Gibbard

2010 | The Southern Journal of Philosophy

Google Scholar

[34] **"Strategy-proofness and Arrow's conditions: Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions"**

Mark Satterthwaite

1975 | Journal of Economic Theory

[35] **"The Equivalence of Strong Positive Association and Strategy-Proofness"**

Eitan Muller, Mark A. Satterthwaite

1977 | Journal of Economic Theory

[36] **"Strategic manipulability without resoluteness or shared beliefs: Gibbard-Satterthwaite generalized"**

John Duggan, Thomas Schwartz

2000 | Social Choice and Welfare

Google Scholar

[37] **"Endogenous Voting Agendas"**

John Duggan

2006 | Social Choice and Welfare

[38] **"Alternatives vs. Outcomes: A Note on the Gibbard-Satterthwaite Theorem"**

Tjark Weber

2009 | MPRA Paper

Google Scholar

[39] **"Parties"**

Thomas Schwartz

2021 | Constitutional Political Economy

Google Scholar

[40] **"Impossibility theorems are modified and unified"**

Uuganbaatar Ninjbat

2015 | Social Choice and Welfare

[41] **"A New Political System Model: Semi-Presidential Government"**

Maurice Duverger

1980 | European Journal of Political Research

[42] **"Duverger's Law: Forty Years Later"**

Maurice Duverger

1986

[43] **"Existence of an equilibrium for a competitive economy"**

Kenneth Arrow, Gerard Debreu

1954 | Econometrica

[44] **"A Set of Independent Necessary and Sufficient Conditions for Simple Majority Decision"**

Kenneth O. May

1952 | Econometrica

Google Scholar

[45] **"Formalizing May's Theorem"**

Dominik Kirst

2022 | arXiv

Google Scholar

[46] **"Quantal Response Equilibria for Normal Form Games"**

Richard D. McKelvey, Thomas R. Palfrey

1995 | Games and Economic Behavior

[47] **"Intransitivities in multidimensional voting models and some implications for agenda control"**

Richard D. McKelvey

1976 | Journal of Economic theory

[48] **"The Core and the Stability of Group Choice in Spatial Voting Games"**

Norman Schofield, Bernard Grofman

2006

[49] **"The Impossibility of a Paretian Liberal"**

Amartya Sen

1970

[50] **"Maximization and the Act of Choice"**

Amartya Sen

1996 | Econometrica

[51] **"Phenylketonuria: a problem in eugenics"**

Lionel Penrose

1946 | The Lancet

[52] **"The relative aetiological importance of birth order and maternal age in mongolism"**

Lionel Penrose

1934 | Proc. R. Soc., B

[53] **"Méthodes de répartition des sièges aux élections de députes par le système de représentation proportionnelle."**

André Sainte-Laguë

1910 | Comptes Rendus Hebdomaires

[54] **"Thresholds and payoffs in list systems of proportional representation"**

Arend Lijphart, Robert W Gibberd

1977 | European Journal of Political Research

[55] **"Duverger's Law Without Strategic Voting"**

Mark Fey

[56] **"Proportionality, Disproportionality and Electoral Systems"**

Michael Gallagher

1991 | Electoral Studies

[57] **"Comparing proportional representation electoral systems"**

Michael Gallagher

1992 | British Journal of Political Science

[58] **"“Effective” Number of Parties: A Measure with Application to West Europe"**

Markku Laakso, Rein Taagepera

1979 | Comparative Political Studies

[59] **"Arrow’s Impossibility Theorem as a Generalisation of Condorcet’s Paradox"**

Ori Livson, മറ്റൊരാൾ

2025 | arXiv

Google Scholar

[60] **"Effective number of parties for incomplete data"**

Rein Taagepera

1997 | Electoral Studies

Google Scholar

[61] **"The size of national assemblies"**

Rein Taagepera

1972

Google Scholar

[62] **"Weighted Voting Doesn't Work: A Mathematical Analysis"**

John F. Banzhaf Iii

1965 | Rutgers Law Review

[63] **"One Man, 3.312 Votes: Mathematical Analysis of Voting Power and Effective Representation"**

John F. Banzhaf Iii

1968 | George Washington Law Review

[64] **"A Method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System"**

Lloyd S. Shapley, Martin Shubik

1954 | American Political Science Review

[65] **"Mathematical Properties of the Banzhaf Power Index"**

Pradeep Dubey, Lloyd S. Shapley

1979 | Mathematics of Operations Research

Google Scholar

[66] **"Trade Using One Commodity as a Means of Payment"**

Lloyd S. Shapley, Martin Shubik

1977 | The Journal of Political Economy

[67] **"Mathematical Institutional Economics"**

Martin Shubik

2012 | Cowles Foundation Discussion Papers

Google Scholar

[68] **"Ideology as a Cultural System"**

Clifford Geertz

1964 | Ideology and Discontent

[69] **"Anti Anti-Relativism"**

Clifford Geertz

1984 | American Anthropologist

[70] **"Two Concepts of Rules"**

John Rawls

Artykuły pokrewne (Google Scholar):

[71] **"Jagiellonian compromise–an alternative voting system for the Council of the European Union"**

W. Słomczyński, K. Życzkowski

2010 | Institutional Design and Voting Power in the European Union (eds. M …

[72] **"Mathematical aspects of degressive proportionality"**

W. Słomczyński, K. Życzkowski

2012 | Mathematical Social Sciences

[73] **"Highly symmetric POVMs and their informational power"**

W. Słomczyński, A. Szymusiak

2016 | Quantum Information Processing

[74] **"Confluence of bound-free coherences in laser-induced autoionization"**

K. Rzążewski, J.H. Eberly

1981 | Physical Review Letters

[75] **"Structure of binary Bose-Einstein condensates"**

M. Trippenbach, K. Góral, K. Rzążewski, B. Malomed, Y.B. Band

2000 | Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics

[76] **"Classical fields approximation for bosons at nonzero temperatures"**

M. Brewczyk, M. Gajda, K. Rzążewski

2007 | Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics

[77] **"Pot and ladle: a formula for estimating the distribution of seats under the Jefferson–D'Hondt method"**

J. Flis, W. Słomczyński, D. Stolicki

2020 | Public Choice

[78] **"Volume of the set of separable states"**

K. Życzkowski, P. Horodecki, A. Sanpera, M. Lewenstein

1998 | Physical Review A

[79] **"Scalable noise estimation with random unitary operators"**

J. Emerson, R. Alicki, K. Życzkowski

2005 | Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics

[80] **"On Mutually Unbiased Bases"**

T. DURT, BG ENGLERT, I BENGTSSON, K. ŻYCZKOWSKI

2010 | International Journal of Quantum Information

APA ONE Publishing System

Fundacja Dobre Państwo © 2026

Article ID: 69e2c54c-8d5c-4a17-9363-5179063dbfdf