Matematyka demokracji: od reguł wyborczych do siły głosu

AUTOR

Fundacja Dobre Państwo

STRESZCZENIE / ABSTRACT

Artykuł 'Matematyka demokracji' zgłębia fundamentalne znaczenie reguł wyborczych i siły głosu w kształtowaniu polityki. Podkreśla, że pozornie techniczne aspekty procedur głosowania mają kluczowy wpływ na wyniki wyborów, skład rządów i kierunek polityki publicznej. Przedstawia teorię wyboru społecznego, analizując różne systemy wyborcze – większościowe, proporcjonalne i mieszane – oraz ich konsekwencje. Omówione zostają również matematyczne ograniczenia demokracji, takie jak twierdzenie Arrowa i paradoks Condorceta, które ujawniają inherentne niestabilności systemów głosowania. Tekst zwraca uwagę na konieczność świadomego projektowania reguł i edukacji obywatelskiej, aby zrozumieć i nawigować w złożoności demokratycznych mechanizmów.

"The Mathematics of Democracy" explores the fundamental importance of electoral rules and voting power in shaping policy. It emphasizes how seemingly technical aspects of voting procedures have a crucial impact on election outcomes, the composition of governments, and the direction of public policy. It introduces social choice theory, analyzing different electoral systems—majoritarian, proportional, and mixed—and their consequences. It also discusses mathematical constraints on democracy, such as Arrow's theorem and the Condorcet paradox, which reveal the inherent instabilities of voting systems. The text emphasizes the need for informed rule design and civic education to understand and navigate the complexities of democratic mechanisms.

Zdrowie demokracji zależy od nędznego szczegółu technicznego, od procedury wyborczej – ostrzegał José Ortega y Gasset. To nie elegancki bon mot, lecz zdanie-klucz, które streszcza fundamentalną intuicję teorii wyboru społecznego. Zmieniając metodę liczenia tych samych głosów, otrzymujemy bowiem odmienne wyniki: inne rządy, inne koalicje, inną politykę publiczną. Gdy Ortega doprecyzowuje, że „wszystko inne jest drugorzędne”, trafia w samo

sedno. Rdzeniem demokracji jest mechanizm agregacji preferencji, nie zaś retoryka czy marketing. W książce Rzążewskiego, Słomczyńskiego i Życzkowskiego to właśnie owo instrumentarium – zbiór reguł, algorytmów i progów – stanowi osnowę naukowej opowieści. Autorzy zmuszają nas, by patrzeć na wybory nie przez pryzmat nastrojów, lecz przez chłodny pryzmat rachunku. Tym samym myśl hiszpańskiego filozofa otwiera pole badań, które łączy historię instytucji z bezwzględną, matematyczną analizą ich konsekwencji. Zacznijmy od narzędzi, bowiem język precyzuje myślenie. System wyborczy to zbiór reguł określających, kto może głosować, jak oddaje głos oraz jak głosy przeliczane są na ostateczny wynik. Rdzeniem demokracji jest mechanizm agregacji preferencji, czyli formalny sposób przekształcania indywidualnych wyborów w decyzję zbiorową. Wybór większościowy oznacza reguły preferujące zwycięstwo kandydata z największą liczbą głosów w okręgu, często jednomandatowym.

SŁOWA KLUCZOWE

Matematyka demokracji | Reguły wyborcze | Siła głosu | Teoria wyboru społecznego | Systemy większościowe | Systemy proporcjonalne | Systemy mieszane | Twierdzenie Arrowa | Paradoks Condorceta | Indeks Penrose'a–Banzhafa | Wskaźnik Shapleya–Shubika | Głosowanie strategiczne | Agregacja preferencji | Ordynacja wyborcza | Kompromis Jagielloński

Ordynacja wyborcza: architektura demokracji

Systemy wyborcze: trzy główne rodziny

Zacznijmy od narzędzi, bowiem język precyzuje myślenie. System wyborczy to zbiór reguł określających, kto może głosować, jak oddaje głos oraz jak głosy przeliczane są na ostateczny wynik. Rdzeniem demokracji jest mechanizm agregacji preferencji, czyli formalny sposób przekształcania indywidualnych wyborów w decyzję zbiorową. Wybór większościowy oznacza reguły preferujące zwycięstwo kandydata z największą liczbą głosów w okręgu, często jednomandatowym. Z kolei wybór proporcjonalny to taki podział mandatów, który w granicach technicznych odwzorowuje procentowe poparcie. System mieszany łączy obie te logiki: część mandatów pochodzi z okręgów jednomandatowych, część z list, przy czym mechanizm

kompensacyjny może zbliżać całość do proporcjonalności (MMP) lub traktować oba człony jako niezależne od siebie (MMM).

Siła głosu przewyższa formalną wagę

Pojęcia te są konieczne, lecz niewystarczające. Kluczowa staje się bowiem siła głosu, którą należy zdefiniować precyzyjnie: to prawdopodobieństwo, że głos danego uczestnika okaże się rozstrzygający, czyli taki, bez którego zwycięska koalicja przestałaby nią być. Siła głosu nie jest tym samym co jego waga – formalna liczba głosów przypisana podmiotowi, na przykład proporcjonalnie do udziałów w spółce. Intuicję tę doskonale ilustruje prosty model: w spółce z progiem większości bezwzględnej wspólnik posiadający 51% udziałów ma w istocie 100% siły (jest dyktatorem), podczas gdy wspólnik z 49% ma jej dokładnie 0%.

Sytuacja ulega jednak dramatycznej zmianie po wprowadzeniu trzeciego udziałowca z zaledwie 2% kapitału. Nagle powstaje pole do tworzenia koalicji, w których ten pozornie „mały” gracz staje się języczkiem u wagi. Matematyka formalizuje tę dynamikę za pomocą precyzyjnych narzędzi. Indeks Penrose’a–Banzhafa liczy, w jakiej części wszystkich możliwych koalicji głos danego gracza jest krytyczny. Z kolei wskaźnik Shapleya–Shubika porządkuje graczy w losowych permutacjach i bada, jak często dany uczestnik okazuje się tym, który „domyka” zwycięską większość. Oba wskaźniki opisują realną siłę, a nie nominalną wagę.

Wybór władzy: od losowania do algorytmów

Analizę współczesnych ordynacji zacznijmy od najstarszej i najbardziej intuicyjnej rodziny: systemów większościowych. Tu zasada jest brutalnie prosta – zwycięzca bierze wszystko. Najprostszy wariant to pluralistyczna reguła „kto pierwszy na mecie” (FPTP), w której mandat zdobywa kandydat z największą liczbą głosów, nawet jeśli jest to poparcie mniejszościowe. Bardziej wyrafinowane wersje wymagają większości bezwzględnej, osiąganej albo przez drugą turę, jak w modelu francuskim, albo przez głos alternatywny (IRV/AV). W tym drugim wyborca nie wskazuje jednego faworyta, lecz tworzy ranking preferencji, a głosy najsłabszych kandydatów są transferowane do momentu, aż ktoś przekroczy próg 50%. Zaletą tej gałęzi jest czytelność i silna więź terytorialna reprezentanta z okręgiem, lecz jej systemową ceną staje się zjawisko „zmarnowanych głosów” oraz dryf w kierunku dwubiegunowości sceny politycznej. Co prawda François Duverger ochrzcił tę zależność mianem prawa, jednak sam studził entuzjazm, określając ją raczej jako mocną hipotezę empiryczną, a nie żelazną determinację. Polska literatura przedmiotu słusznie dodaje, że jego „robocze hipotezy” mają charakter probabilistyczny. System większościowy nie musi zawsze i wszędzie rodzić układu dwupartyjnego, lecz jest to jego modalna trajektoria, o ile nie zakłóci jej silna logika regionalna. To cenna przestroga przed pokusą normatywnego absolutyzmu.

Systemy większościowe: stabilność i prawo Duvergera

Istotą systemów proporcjonalnych jest dążenie do wiernego odzwierciedlenia struktury społecznego poparcia. Służą temu matematyczne formuły, jak metody dzielnikowe czy kwotowe. Metoda d'Hondta subtelnie wzmacnia największe ugrupowania, Sainte-Laguë oszczędniej traktuje mniejszych graczy, zaś warianty metody największych reszt najpierw przyznają mandaty za pełne kwoty, by pozostałe miejsca rozdać tym z największymi „resztkami" głosów. Jednak w praktyce każda z tych formuł funkcjonuje w cieniu dwóch potężnych progów: prawnego, czyli klauzuli zaporowej, oraz naturalnego, wynikającego z samej wielkości okręgu. To one, znacznie bardziej niż arytmetyka, decydują o realnej reprezentatywności. Paradoks polega na tym, że im system staje się wierniejszy w odwzorowaniu woli wyborców, tym większe generuje ryzyko fragmentacji i paraliżu koalicyjnego. Nie jest to przypadkowa wada, lecz nieunikniony skutek strukturalnego napięcia między polityczną inkluzywnością a sterownością państwa.

Systemy proporcjonalne: logika progów i list

Systemy mieszane, od niemieckiego MMP po japońskie MMM, próbują korygować te napięcia. W niemieckim MMP tak zwany drugi głos, oddany na listę partyjną, kompensuje nadreprezentację zwycięzców z okręgów, dążąc do proporcjonalności w skali kraju. W japońskim MMM oba strumienie biegną równolegle, bez mechanizmu kompensacji, co częściej kończy się arytmetyką w duchu „zwycięzca bierze więcej". Architektura mieszana nie jest zatem estetycznym kompromisem, lecz chłodną kalkulacją siły. Stawia to fundamentalne pytanie: ile lokalności i personalizacji reprezentacji jesteśmy gotowi „kupić" za cenę wierności proporcjom?

Systemy mieszane: stabilność kontra reprezentatywność

W 1951 roku dwudziestodziewięcioletni Kenneth Arrow opublikował pracę **Social Choice and Individual Values** i wywołał intelektualne trzęsienie ziemi. Jego twierdzenie, jedno z najważniejszych odkryć w teorii wyboru społecznego, uderzyło w samo serce demokratycznych aspiracji. Z matematyczną precyzją dowiódł czegoś, co wprawiło w konsternację ekonomistów, politologów i filozofów: nie istnieje idealny, w pełni racjonalny i sprawiedliwy system głosowania, gdy do wyboru mamy więcej niż dwie opcje. Arrow wykazał, że próba zbudowania spójnej „woli ogółu" z indywidualnych preferencji nieuchronnie prowadzi do sprzeczności.

Aby pojąć wagę tego odkrycia, trzeba rozłożyć je na czynniki pierwsze. Arrow sformułował pięć pozornie niewinnych warunków, które jego zdaniem powinien spełniać każdy sensowny system agregacji preferencji. Po pierwsze, **nieograniczona dziedzina** (uniwersalność) – system musi przyjąć każdy możliwy zestaw opinii, bez wykluczania żadnego scenariusza. Po drugie, **zasada Pareto** – jeśli wszyscy bez wyjątku wolą A od B, wynik zbiorowy musi to odzwierciedlić. To fundament zdrowego rozsądku. Po trzecie, **niedyktatorskość**, czyli oczywista ochrona przed sytuacją, w której wola jednej osoby staje się prawem dla wszystkich, a demokracja fasadą.

Czwarty warunek to **przechodniość**: jeśli zbiorowość woli A od B i B od C, to musi także woleć A od C. Bez tej spójności wynik zależy od kolejności głosowań, co otwiera drogę do chaosu i manipulacji. Wreszcie piąty, kluczowy aksjomat: **niezależność od alternatyw nieistotnych (IIA)**. Oznacza on, że wynik rywalizacji między A i B powinien zależeć wyłącznie od tego, jak wyborcy oceniają A i B, a nie od obecności kandydata C. W przeciwnym razie wprowadzenie do gry nowego gracza mogłoby w paradoksalny sposób odwrócić wynik między dwoma głównymi rywalami. Każdy z tych warunków z osobna wydaje się niepodważalny. Problem w tym, że – jak dowiódł Arrow – nie da się ich spełnić jednocześnie.

Prosty przykład ilustruje tę matematyczną pułapkę. Wyobraźmy sobie trzech wyborców i trzy opcje: A, B, C. Ich preferencje wyglądają następująco: wyborca 1 woli A > B > C; wyborca 2 woli B > C > A; a wyborca 3 woli C > A > B. Każda indywidualna hierarchia jest w pełni logiczna. Jednak gdy zastosujemy zasadę większości do każdej pary, pojawia się cykl: większość (wyborcy 1 i 3) woli A od B, większość (wyborcy 1 i 2) woli B od C, ale jednocześnie większość (wyborcy 2 i 3) woli C od A. Wola zbiorowa staje się nieprzechodnia, łamiąc czwarty aksjomat. To klasyczny paradoks Condorceta, który pokazuje, że próba ratowania sytuacji, na przykład przez zastosowanie innych metod liczenia, naruszy z kolei inny aksjomat, najczęściej niezależność od alternatyw nieistotnych.

Twierdzenie Arrowa ma dwa fundamentalne znaczenia. Po pierwsze, wyznacza matematyczną granicę dla projektantów systemów wyborczych, pokazując, że demokracja nigdy nie osiągnie logicznej doskonałości. Zawsze będziemy zmuszeni do kompromisu i wyboru, który z pożądanych warunków poświęcić. Po drugie, stało się ono kamieniem węgielnym nowoczesnej teorii wyboru społecznego, dyscypliny łączącej ekonomię, politologię i teorię gier. Dla ekonomistów Arrow był tym, kim dla fizyki Newton – twórcą ram teoretycznych, które na dekady zdefiniowały pole badawcze i sposób zadawania pytań.

Filozofowie dostrzegli w twierdzeniu Arrowa także głęboki wymiar normatywny. Amartya Sen, laureat Nagrody Nobla, argumentował, że nie jest to koniec demokracji, lecz „początek bardziej świadomej refleksji nad tym, czego naprawdę od niej oczekujemy”. Krytycy wskazywali z kolei, że Arrow postawił zbyt restrykcyjne warunki, zwłaszcza w przypadku niezależności od alternatyw nieistotnych. W praktyce politycznej, twierdzili, zapewnienie kompromisu może być ważniejsze niż logiczna czystość, a pojawienie się nowego kandydata słusznie powinno zmieniać cały krajobraz preferencji.

Dziś twierdzenie Arrowa traktuje się nie jako przeszkodę, lecz jako mapę nieuchronnych ograniczeń. Uczy, że każdy system wyborczy jest wyborem wartości: możemy poświęcić prostotę na rzecz pluralizmu albo przejrzystość na rzecz stabilności, ale nie możemy mieć wszystkiego. Jak pisał Jon Elster, „polityka to sztuka tworzenia instytucji w świecie, w którym ideały pozostają w wiecznym konflikcie". Co ciekawe, logika Arrowa okazała się uniwersalna, znajdując zastosowanie w informatyce i sztucznej inteligencji. Algorytmy rekomendacyjne czy platformy crowdsourcingowe również muszą agregować sprzeczne preferencje użytkowników, wpadając w te same pułapki cykliczności i paradoksów.

Twierdzenie Arrowa nie tyle podważa demokrację, ile ją urealnia. Zamiast mitologizować „wolę ludu" jako spójną, jednolitą siłę, pokazuje, że każda decyzja zbiorowa jest artefaktem – konstruktem obciążonym kompromisami i arbitralnością przyjętych reguł. Matematyczne paradoksy nie są więc argumentem przeciw demokracji, lecz jej trzeźwym urealnieniem. Demokracja przestaje być romantyczną wizją idealnego porządku, a staje się świadomą praktyką projektowania niedoskonałych, ale możliwych do zaakceptowania reguł gry.

Twierdzenie Arrowa: iluzja idealnego wyboru

Jeśli twierdzenie Arrowa wyznacza horyzont niemożliwości, to paradoks Condorceta precyzyjnie mapuje niestabilności w jego obrębie. Pokazuje on, że preferencje zbiorowe mogą wpaść w cykl, nawet gdy każdy indywidualny głos jest wewnętrznie spójny (A > B > C). W efekcie „wola większości" staje się kapryśna: raz popiera A, za chwilę B, a potem C, w zależności od tego, jak ułożono pary w głosowaniu. Z tego powodu systemy condorcetowskie, czyli metody premiujące kandydata, który w bezpośrednich starciach wygrywa z każdym innym, są teoretycznie eleganckie, lecz politycznie niepraktyczne. Twierdzenie Maya stanowi tu ważny kontrapunkt, dowodząc, że dla wyboru między dwiema opcjami reguła zwykłej większości jest jedyną procedurą, która pozostaje neutralna, anonimowa i monotoniczna, a przy tym zawsze daje rozstrzygnięcie. Toteż demokracje instynktownie lgną do referendów typu „tak/nie", obawiając się łamigłówek preferencyjnych, które mnożą matematyczne niespodzianki.

Paradoksy demokracji: cykl Condorceta

W tym miejscu na scenę wkracza prawo, które od półwiecza służy za busolę przy projektowaniu systemów głosowań w zgromadzeniach delegatów o zróżnicowanej demografii. Prawo pierwiastkowe Penrose'a. Jego teza, w uproszczeniu, jest następująca: jeżeli siła wpływu obywatela małego i dużego państwa na decyzje ciała federalnego ma być porównywalna, to wagi głosów poszczególnych krajów powinny rosnąć proporcjonalnie do pierwiastka kwadratowego z liczby ludności, nie zaś liniowo. Zasada ta stała się

inspiracją między innymi dla projektu Kompromisu Jagiellońskiego autorstwa Słomczyńskiego i Życzkowskiego, gdzie wagi głosów w Radzie UE są proporcjonalne do pierwiastka z populacji, a próg większości kwalifikowanej dobrano tak, by minimalizować dysproporcje siły między obywatelami. Oto, jak twierdzenie matematyczne przekłada się na propozycję ustrojową.

Prawo Penrose'a: siła głosu w Unii Europejskiej

Nauka stawia nas przed niewygodną prawdą twierdzenia Gibbard–Satterthwaite. Każdy dostatecznie złożony system wyborczy jest podatny na głosowanie strategiczne. Nie jest to jednak powód do kapitulacji, lecz pragmatyczny drogowskaz: analizować, projektować, edukować.

Głosowanie strategiczne: nieuchronna taktyka

Nie sposób uciec od politycznej prawdy, że reguły gry ustalają zwycięzcy. To nie cynizm, lecz chłodna obserwacja instytucjonalna. Włoskie eksperymenty z ordynacjami, ochrzczonymi jako „porcellum” i „italicum”, boleśnie pokazały, jak krótkoterminowe kalkulacje komplikują długofalową akceptację systemu. Z kolei polskie majstrowanie przy metodach i okręgach dowiodło, z jaką siłą rzucony bumerang potrafi wrócić do nadawcy. To wszystko prowadzi do jednego wniosku: warto obstawać przy regułach stabilnych i rozumianych przez obywateli. Proste systemy mają bowiem przewagę legitymizacyjną, gdyż ich logika jest powszechnie zrozumiała; złożone z kolei oferują przewagę sprawiedliwościową, ponieważ lepiej odwzorowują społeczny pluralizm. Fundamentalny wybór polityczny rozgrywa się właśnie między tymi dwiema wartościami. W tym miejscu warto wsłuchać się w głos klasyków. Arystotelesowski kompas przypomina, że demokracja i oligarchia to nie tylko kwestia liczb, lecz także ethos samej procedury. Stagiryta pisał, że „jedne urzędy obsadza się w drodze losowania, drugie w drodze wyboru”, a prawdziwa sztuka rządzenia polega na takim łączeniu obu porządków, by uniknąć zarówno tyranii większości, jak i władzy nielicznych.

> Fundamentalny wybór polityczny rozgrywa się właśnie między tymi dwiema wartościami. W tym miejscu warto wsłuchać się w głos klasyków. Arystotelesowski kompas przypomina, że demokracja i oligarchia to nie tylko kwestia liczb, lecz także ethos samej procedury. Stagiryta pisał, że „jedne urzędy obsadza się w drodze losowania, drugie w drodze wyboru”, a prawdziwa sztuka rządzenia polega na takim łączeniu obu porządków, by uniknąć zarówno tyranii większości, jak i władzy nielicznych.

Inspiracje

[1] **Jean-charles De Borda**

APA ONE Publishing System
Fundacja Dobre Państwo © 2026
Article ID: 4ff85635-a26d-404f-ba45-9074790ef0bd